

տղոմյան ճարտարագիտություն

# ՆՁՄՏՆՆՏՈՆ ԿԻՉՉԸՈ ԿՅՆՆԵՇԻ ԹՎՆՆՈՒՆԱԾՈ

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar; E = \hbar \omega; \lambda = \frac{\hbar}{p}$$


$$\Delta x \Delta p \geq \hbar; E = \hbar \omega; \lambda = \frac{\hbar}{p}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar; E = \hbar \omega; \lambda = \frac{\hbar}{p}$$

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar; E = \hbar \omega; \lambda = \frac{\hbar}{p}$$

ამოცანათა კრებული კვანტურ მექანიკაში



ივანე ჯავახიშვილის სახელობის  
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

თეიმურაზ ნადარეიშვილი

# ამოცანათა კრებული კვანტურ მექანიკაში



უნივერსიტეტის  
გამომცემლობა

ამოცანათა კრებული განკუთვნილია ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების სტუდენტთათვის და მოიცავს არარელატივისტური კვანტური მექანიკის (კვანტური მექანიკა I) თითქმის ყველა ძირითად საკითხს. კრებულში შესულია 604 სხვადასხვა სირთულის ამოცანა, რომელთაგან რთულ, ვარსკვლავით აღნიშნულ ამოცანებს აქვთ მითითებები. თითოეულ თავს გააჩნია მოკლე შესავალი – თეორიული ნაწილი, სადაც თავმოყრილია ამოცანების ამოხსნისათვის აუცილებელი ფორმულები. კრებულს აქვს დამატებაც, რომელშიც დიდი ნაწილი უკავია სპეციალური ფუნქციების თეორიის ელემენტებს, რაც ასევე აუცილებელია ამოცანების ამოხსნისათვის, რადგანაც კვანტური მექანიკის ბევრი ამოცანა სწორედ ამ ფუნქციების შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებებზე დადის.

წიგნი ქართულ ენაზე ამ ტიპის ამოცანათა კრებულის შექმნის პირველი მცდელობაა. ამიტომ, შესაძლოა, ის დაზღვეული არც არის ზოგიერთი ხარვეზისაგან. ავტორი მადლობელი იქნება ყველა ნაკლის მითითებისათვის, რომელთაც იგი გაითვალისწინებს მომავალში უფრო სრულყოფილი და შევსებული კრებულის გამოცემისას.

რედაქტორი                    მერაბ ელიაშვილი, ფიზ-მათ. დოქტორი,  
თსუ-ის პროფესორი

რეცენზენტები:            თამაზ კერესელიძე, ფიზ-მათ. დოქტორი,  
თსუ-ის პროფესორი  
  
გიორგი ციციშვილი, ფიზ-მათ. დოქტორი,  
თსუ-ის ასოცირებული პროფესორი

გამოცემულია ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის საუნივერსიტეტო საგამომცემლო საბჭოს გადანყვეტილებით.

© ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის  
სახელმწიფო უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 2018

ISBN 978-9941-13-682-5 (pdf)

# სარჩევი

ამოც. პას.

თავი 1. ოპერატორები კვანტურ მექანიკაში		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	7	
1.1. წრფივი ოპერატორების თეორიის ძირითადი დებულებები.....	8	121
1.2. საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. საშუალოს ცნება. პროექციული და უნიტარული ოპერატორები .....	16	124
თავი 2. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	26	
2.1. დისკრეტული სპექტრი. სტაციონარული მდგომარეობები .....	27	129
2.2. უწყვეტი სპექტრის მდგომარეობები. პოტენციურ ბარიერებში ნაწილაკის გასვლა .....	41	139
2.3. თავისუფლების რამდენიმე ხარისხის მქონე სისტემები .....	45	142
თავი 3. იმპულსის მომენტი		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	47	143
თავი 4. მოძრაობა ცენტრალური სიმეტრიის ველში		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	53	
4.1 დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები .....	54	144
4.2. აქსიალური სიმეტრიის მქონე სისტემები .....	61	148
თავი 5. მდგომარეობის ცვლილება დროში		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	63	151
თავი 6. კვანტურ-მექანიკური ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	72	
6.1. შეშფოთების სტაციონარული თეორია .....	75	156
6.2. ვარიაციული მეთოდი .....	82	161
6.3. შეშფოთების არასტაციონარული თეორია .....	86	163
თავი 7. კვაზიკლასიკური მიახლოება		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	89	
7.1. ენერგეტიკული სპექტრის დაკვანტვა .....	90	166
7.2. კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციები, ალბათობები და საშუალოები. პოტენციურ ბარიერებში გასვლა .....	92	167
თავი 8. სპინი		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	95	168
თავი 9. იგივეური ნაწილაკები		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	99	
9.1. ტალღური ფუნქციების სიმეტრია .....	100	171
9.2. მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმის ელემენტები .....	103	175
თავი 10. ატომები და მოლეკულები		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	106	
10.1. ერთ- და ორელექტრონიანი ატომების სტაციონარული მდგომარეობები .....	108	176

10.2. მრავალელექტრონიანი ატომები .....	110	179
10.3. ორატომიანი მოლეკულა .....	111	180
თავი 11. მოძრაობა მაგნიტურ ველში		
ძირითადი ცნებები და ფორმულები .....	114	181
დამატება .....		189
A. ზოგიერთი განსაზღვრული და განუსაზღვრელი ინტეგრალი .....		189
B. დირაკის დელტა ფუნქციის ზოგიერთი თვისება .....		191
C. სპეციალური ფუნქციები .....		193
C.1. Γ - ფუნქცია .....		193
C.2. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია. ზოგიერთი ინტეგრალი გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებით .....		195
C.3. ბესელისა და ეირის ფუნქციები .....		200
C.4. ლეჟანდრის პოლინომები .....		203
C.5. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია .....		204
D. მიახლოებითი გამოთვლების ფორმულები .....		206
E. ენერჯიის ერთეულები .....		207
F. ძირითადი ფიზიკური მუდმივები .....		208
G. ორატომიანი მოლეკულის მუდმივები .....		210
ლიტერატურა .....		211

# თავი 1. ოპერატორები კვანტურ მექანიკაში

## ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვანტური მექანიკის მათემატიკური აპარატი მჭიდროდაა დაკავშირებული წრფივი ოპერატორების თეორიასთან, რომლის ერთ-ერთი ძირითადი დებულების თანახმად, ფიზიკურ, ცდაზე დაკვირვებად სიდიდეებს შეესაბამებოდათ ერმიტული (თვითშეუღლებული) ოპერატორები, რომლებიც მოქმედებენ ფიზიკური სისტემის მდგომარეობის აღმწერი  $\Psi$  ტალღური ფუნქციების (მდგომარეობის ვექტორების) სივრცეში.

$\hat{A}$  ოპერატორს ეწოდება წრფივი, თუ სრულდება პირობა:

$$\hat{A}(c_1\psi_1 + c_2\psi_2) = c_1\hat{A}\psi_1 + c_2\hat{A}\psi_2, \quad (1.1)$$

სადაც  $c_1$  და  $c_2$  მუდმივი რიცხვებია, ხოლო  $\psi_1$  და  $\psi_2$  – ნებისმიერი ფუნქციები.

$\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორების კომუტატორი ასე განიმარტება:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (1.2)$$

ნებისმიერ წრფივ  $\hat{L}$  ოპერატორს შეიძლება შევუსაბამოთ ერმიტულად შეუღლებული  $\hat{L}^+$  ოპერატორი, რომელიც ასე განიმარტება:

$$\langle \psi_2 | \hat{L} \psi_1 \rangle \equiv \int \psi_2^*(q) \hat{L} \psi_1(q) dq = \int (\hat{L}^+ \psi_2(q))^* \psi_1(q) dq \equiv \langle \hat{L}^+ \psi_2 | \psi_1 \rangle \quad (1.3)$$

(ამასთან,  $\Psi_{1,2}$  ფუნქციებს გარკვეული შეზღუდვები ედება). თუ  $\hat{L} = \hat{L}^+$  მაშინ ოპერატორს ეწოდება ერმიტული (თვითშეუღლებული) ოპერატორი, თუმცა, ზოგადად, ოპერატორის ერმიტულობისა და თვითშეუღლებების ცნებები არ ემთხვევა ერთმანეთს.

$\hat{f}$  ოპერატორის საკუთარი  $\Psi_n$  ფუნქციებისა და საკუთარი  $f_n$  მნიშვნელობების განტოლება ასე განიმარტება:

$$\hat{f}\Psi_n = f_n\Psi_n \quad (1.4)$$

$\Psi_n$  საკუთარი ფუნქციები აღწერენ სისტემის მდგომარეობას, როდესაც გარკვეული  $f_n$  მნიშვნელობა აქვს  $f$  ფიზიკურ სიდიდეს (ნებისმიერი მდგომარეობის დროს ფიზიკურ სიდიდეს არ გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობა). ეს ფუნქციები ორთონორმირებული ფუნქციებია და ადგენენ სრულ სისტემას, რაც საშუალებას იძლევა ნებისმიერი მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია გავშალოთ ამ ფუნქციებად:

$$\varphi = \sum_n c_n \Psi_n, \quad (1.5)$$



სადაც

$$c_n = \langle \Psi_n | \phi \rangle = \int \Psi_n^*(q) \phi(q) d\tau_q \quad (1.6)$$

$A$  ფიზიკური სიდიდის საშუალო  $\Psi$  მდგომარეობაში შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\langle A \rangle = \langle \Psi | \hat{A} | \Psi \rangle = \int \Psi^*(q) \hat{A} \Psi(q) d\tau_q \quad (1.7)$$

$\hat{A}$  ოპერატორს ეწოდება უნიტარული, თუ ის აკმაყოფილებს პირობას:

$$\hat{A}^+ \hat{A} = \hat{A} \hat{A}^+ = 1 \quad (1.8)$$

### 1.1. წრფივი ოპერატორების თეორიის ძირითადი დებულებები

1.1. განიხილეთ შემდეგი ოპერატორები ( $-\infty < x < \infty$ ):

ა) წანაცვლების –  $\hat{T}_a : \hat{T}_a \Psi(x) \equiv \Psi(x+a)$  ;

ბ) არეკვლის –  $\hat{I} : \hat{I} \Psi(x) \equiv \Psi(-x)$ ;

გ) მასშტაბის ცვლილების –  $\hat{M}_c : \hat{M}_c \Psi(x) \equiv \sqrt{c} \Psi(cx), c > 0$ ;

დ) კომპლექსური შეუღლების –  $\hat{K} : \hat{K} \Psi(x) \equiv \Psi^*(x)$ ;

ე) ორი ნაწილაკის კოორდინატების გადასმის –  $\hat{P}_{12} : \hat{P}_{12} \Psi(x_1, x_2) \equiv \Psi(x_2, x_1)$ .

არიან თუ არა ჩამოთვლილი ოპერატორები წრფივი? იპოვეთ მათი შებრუნებული ოპერატორები.

1.2. აჩვენეთ, რომ ორი წრფივი ოპერატორის ჯამი (სხვაობა) ისევ წრფივი ოპერატორია.

1.3. აჩვენეთ, რომ ორი წრფივი ოპერატორის ნამრავლი ისევ წრფივი ოპერატორია.

1.4. აჩვენეთ, რომ  $\left( \frac{1}{x} \frac{d}{dx} x \right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$ .

1.5. აჩვენეთ, რომ  $\frac{d}{dx} x = 1 + x \frac{d}{dx}$ .

1.6. აჩვენეთ, რომ  $x^2 \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = x \frac{d}{dx} - 1$ .

1.7. იმოქმედეთ  $\hat{A} = \left( \frac{d}{dx} + x^4 \right)^2$  ოპერატორით რაიმე  $\Psi$  ფუნქციაზე.

1.8. იმოქმედეთ  $\hat{B} = \left( \frac{d}{dx} + A \right)^2$  ოპერატორით რაიმე  $\Psi$  ფუნქციაზე, სადაც  $A = const$ .

1.9. იმოქმედეთ  $\hat{C} = \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2$  ოპერატორით რაიმე  $\psi$  ფუნქციაზე. ახსენით, რატომ შეგვიძლია 1.8 და 1.9 ამოცანაში ოპერატორის, როგორც ორი წევრის ჯამის კვადრატის წარმოდგენა, 1.7 ამოცანაში კი – არა.

1.10. იმოქმედეთ  $\hat{D} = \left( \frac{d}{dx} + x \right)^3$  ოპერატორით რაიმე  $\psi$  ფუნქციაზე.

1.11. იმოქმედეთ  $\hat{L} = \left( \frac{d}{dx} + \frac{1}{x} \right)^3$  ოპერატორით რაიმე  $\psi$  ფუნქციაზე.

1.12. იმოქმედეთ  $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} x^2$  და  $\hat{B} = \left( \frac{d}{dx} x \right)^2$  ოპერატორებით შემდეგ ფუნქცი-ებზე: ა)  $\cos x$  და ბ)  $e^x$ .

1.13. შეადარეთ ერთმანეთს  $\hat{A} = \left( x \frac{d}{dx} \right)^2$  და  $\hat{B} = \left( \frac{d}{dx} x \right)^2$  ოპერატორები.

1.14. აიყვანეთ კვადრატში  $\hat{L} = i\hbar \vec{\nabla} + \vec{A}(\vec{r})$  ოპერატორი.

**პითითება:** გამოიყენეთ ტოლობა  $\vec{\nabla} \vec{A} \psi = \vec{A} \vec{\nabla} \psi + \text{div} \vec{A} \psi$ .

1.15.\* იპოვეთ შემდეგი ოპერატორები

ა)  $\exp\{i a \hat{I}\}$ ;

ბ)  $\hat{L}_a \equiv \exp\left\{ a x \frac{d}{dx} \right\}$

ცხადი სახით, სადაც  $a$  ნამდვილი პარამეტრია, ხოლო  $\hat{I}$  -არეკვლის ოპერატორი.

**პითითება:**  $\hat{F} = F(\hat{f})$  სახის ოპერატორი (ფუნქცია ოპერატორისა), სადაც  $F(z)$  ფუნქციაა  $z$ -ის (რომელიც იშლება ტეილორის მწკრივად  $F(z) = \sum_n c_n z^n$ ), უნდა

გაიგოს, როგორც ოპერატორი  $\hat{F} = \sum_n c_n \hat{f}^n$ . ისარგებლეთ ამ განმარტებით.

1.16. იპოვეთ ოპერატორი, რომელსაც  $\psi(x)$  გადაჰყავს  $\psi(x+a)$ -ში.

1.17. იპოვეთ ოპერატორი, რომელსაც  $\psi(\vec{r})$  გადაჰყავს  $\psi(\vec{r} + \vec{a})$ -ში.

1.18. იპოვეთ ოპერატორი, რომელსაც  $\psi(\varphi)$  გადაჰყავს  $\psi(\varphi + \alpha)$ -ში, სადაც  $\varphi$  კუთხური ცვლადია (სივრცის მობრუნების ოპერატორი  $\alpha$  კუთხეზე).

1.19. თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორებია, იქნება თუ არა ერთმანეთის ტოლი ორი ოპერატორი –  $\sin(\hat{A} + \hat{B})$  და  $\sin(\hat{B} + \hat{A})$

1.20. დაამტკიცეთ, რომ  $[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} + \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$

და  $[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$ .

1.21. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია იაკობის იგივეობა

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] \equiv 0.$$

1.22. აჩვენეთ, რომ ჯამის კომუტატორი ტოლია კომუტატორების ჯამის, ანუ სრულდება ტოლობა:

$$\left[ \sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k].$$

1.23. იპოვეთ კომუტატორი  $x$  და ლაპლასის  $\Delta$  ოპერატორებს შორის.

1.24.  $\hat{L}$  და  $\hat{M}$  ოპერატორები აკმაყოფილებენ პირობას  $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$ . იპოვეთ  $\hat{A} = \hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L}$ .

**მიითითება:**  $\hat{A}$ -ს დაუმატეთ და დააკელით  $\hat{M}\hat{L}\hat{M}$  წევრები და მიღებული გამოსახულების სხვაობებში მარცხნივ და მარჯვნივ ფრჩხილებს გარეთ გაიტანეთ  $\hat{M}$ .

1.25.\*  $\hat{L}$  და  $\hat{M}$  ოპერატორები აკმაყოფილებენ პირობას  $\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$ . იპოვეთ  $\hat{A} = f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L})$ .

1.26. მოცემულია ორი ოპერატორი –  $\hat{L} = x^n \frac{d}{dx}$  და  $\hat{M} = \frac{d}{dx} x^m$ . დაადგინეთ  $n$ -ის და  $m$ -ის რა მნიშვნელობებისათვის კომუტირებენ ეს ოპერატორები.

1.27. დაამტკიცეთ, რომ, თუ  $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ , მაშინ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

ა)  $[\hat{A}, \hat{B}^2] = 2\hat{B}$ ;   ბ)  $[\hat{A}, \hat{B}^3] = 4\hat{B}^2$ ;   გ)  $[\hat{A}^2, \hat{B}^2] = 2(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})$

1.28. ცნობილია, რომ  $\hat{A}^2 = \hat{A}_1^2 + \hat{A}_2^2$ . დაამტკიცეთ, რომ, თუ  $\hat{A}_1$  და  $\hat{A}_2$  ოპერატორები კომუტირებენ  $\hat{B}$  ოპერატორთან, მაშინ მასთან კომუტირებს  $\hat{A}^2$  ოპერატორიც.

1.29.  $\hat{A}$  ოპერატორი კომუტირებს  $\hat{B}$  და  $\hat{C}$  ოპერატორებთან. შეიძლება თუ არა აქედან დავასკვნათ, რომ  $\hat{B}$  და  $\hat{C}$  ოპერატორები კომუტირებენ?

1.30.\* აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან, ანუ  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ , მაშინ: ა)  $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n\hat{B}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$  და ბ)  $[\hat{A}^n, \hat{B}] = n\hat{A}^{n-1}[\hat{A}, \hat{B}]$ , სადაც  $n$  მთელი რიცხვია.

1.31.\* აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან, ანუ  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]]$ , მაშინ სრულდება ტოლობა:

$$[\hat{A}, F(\hat{B})] = [\hat{A}, \hat{B}]F'(\hat{B}),$$

სადაც  $F'(x)$  აღნიშნავს  $F(x)$  ფუნქციის წარმოებულს.

**მითითება:** ჯერ ისარგებლეთ ინდუქციის მეთოდით და აჩვენეთ, რომ  $[\hat{A}, \hat{B}^n] = n[\hat{A}, \hat{B}]\hat{B}^{n-1}$  და შემდეგ  $F(x)$  ფუნქცია გამაღეთ ტეილორის მწკრივად.

1.32. რაიმე  $\lambda$  პარამეტრზე დამოკიდებული  $\hat{M}(\lambda)$  ოპერატორის წარმოებული ამ პარამეტრით შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\frac{d\hat{M}(\lambda)}{d\lambda} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\hat{M}(\lambda + \varepsilon) - \hat{M}(\lambda)}{\varepsilon}.$$

ამ განმარტების საფუძველზე აჩვენეთ, რომ:

$$\frac{d}{d\lambda}(\hat{A}\hat{B}) = \frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{B} + \hat{A}\frac{d\hat{B}}{d\lambda}.$$

**მითითება:** გამოიყენეთ წარმოებულის განმარტება და მრიცხველში დაუმატეთ და დააკელით  $\hat{A}(\lambda + \varepsilon)\hat{B}(\lambda)$  წევრი.

1.33. წინა ამოცანაში მიღებული თანაფარდობის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ:

$$\frac{d}{d\lambda}(\hat{A}^{-1}) = -\hat{A}^{-1}\frac{d\hat{A}}{d\lambda}\hat{A}^{-1}.$$

მითითება: გაანარმოეთ  $\hat{A}\hat{A}^{-1} = 1$  ტოლობა.

1.34.\* დაამტკიცეთ, რომ  $\hat{A}$  და  $\hat{L}$  ოპერატორებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობა:

$$e^{\hat{L}}\hat{A}e^{-\hat{L}} = \hat{A} + \frac{1}{1!}[\hat{L}, \hat{A}] + \frac{1}{2!}[\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}]] + \frac{1}{3!}[\hat{L}, [\hat{L}, [\hat{L}, \hat{A}]]] \dots$$

**მითითება:** განიხილეთ  $s$  პარამეტრზე დამოკიდებული  $\hat{A}(s)$  ოპერატორი

$$\hat{A}(s) = e^{s\hat{L}}\hat{A}e^{-s\hat{L}}$$

და განიხილეთ მისი პირველი და მაღალი რიგის წარმოებულები  $\lambda$  პარამეტრით.

1.35.\* აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები კომუტირებენ საკუთარ კომუტატორებთან, ანუ  $[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] = [\hat{B}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0$ , მაშინ სამართლიანია ვეილის ტოლობა:

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}} e^{\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$$

**მიითეთება:** განიხილეთ ოპერატორი

$$\hat{T}(s) = e^{\hat{A}s} e^{\hat{B}s},$$

გაანარმოეთ ეს ოპერატორი  $s$  პარამეტრით და გამოიყენეთ 1.30 ამოცანის შედეგები.

1.36.\* აჩვენეთ, რომ  $\hat{A}$  და  $\hat{B} = e^{-\beta\hat{H}}$  ოპერატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა

$$[\hat{A}, e^{-\beta\hat{H}}] = e^{-\beta\hat{H}} \int_0^\beta e^{\lambda\hat{H}} [\hat{A}, \hat{H}] e^{-\lambda\hat{H}} d\lambda.$$

**მიითეთება:** გამოიყენეთ ფაქტი, რომ დასამტკიცებელი ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარეები ტოლია  $\beta = 0$ -თვის და აჩვენეთ, რომ ამ ტოლობის მარცხენა და მარჯვენა მხარე ერთნაირ პირველი რიგის დიფერენციალურ განტოლებას აკმაყოფილებს.

1.37.\* ჩათვალეთ  $\lambda$  მცირე პარამეტრად და იპოვეთ  $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$  ოპერატორის გამლა ამ პარამეტრის მიხედვით.

**მიითეთება:** დანერეთ ოპერატორული ტოლობა:

$$(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \hat{C}_n.$$

გაამრავლეთ ის  $(\hat{A} - \lambda\hat{B})$  ოპერატორზე და უცნობი  $\hat{C}_n$  ოპერატორები იპოვეთ მიღებული ტოლობის ორივე მხარეში  $\lambda$  პარამეტრის ხარისხების გატოლებით.

1.38. აჩვენეთ, რომ  $\hat{L} = x \frac{d}{dx}$  და  $\hat{M} = \frac{d}{dx} x$  ოპერატორები ერთმანეთთან კომუტირებენ.

1.39. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა)  $[x, \hat{p}_x^2]$ ; ბ)  $[x^2, \hat{p}_x]$ .

1.40. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა)  $[x^2, \hat{p}_x^2]$  ბ)  $\left[ \frac{d^2}{dx^2}, x^3 \right]$ .

1.41. დაამტკიცეთ, რომ კომუტატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$a) [\hat{p}_x, f(x)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}; \quad b) [x, f(x)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p_x},$$

სადაც  $f(x)$  ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.42. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$a) [f(x), \hat{p}_x^2] = 2i\hbar \frac{\partial f}{\partial x} \hat{p}_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2},$$

$$b) [x^2, [x, p_x^2]] = -4\hbar^2 x,$$

სადაც  $f(x)$  ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.43. აჩვენეთ, რომ ჰამილტონიანისთვის

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

სამართლიანია შემდეგი კომუტაციური თანაფარდობები:

$$a) [\hat{H}, x] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x; \quad b) [\hat{H}, \hat{p}_x] = i\hbar \frac{\partial V}{\partial x};$$

$$b) [\hat{H}, \hat{p}_x^2] = 2i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} \hat{p}_x + \hbar^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}.$$

1.44.\* აჩვენეთ, რომ ჰამილტონიანი

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x),$$

(სადაც  $V(x)$  პერიოდული პოტენციალია  $V(x+a) = V(x)$ ), კომუტირებს ტრანსლაციის  $\hat{T}(a)$  ოპერატორთან, რომელიც ასე განმარტდება:  $\hat{T}(a)\Psi(x) = \Psi(x+a)$ .

**მიოთება:** ისარგებლეთ ფორმულით:

$$\Psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n} \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{ia}{\hbar} \right)^n \hat{p}^n \Psi(x) = e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} \Psi(x) \equiv \hat{T}(a)\Psi(x).$$

1.45. დაამტკიცეთ, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში თუ პოტენციური ენერგია სიმეტრიულია  $V(x) = V(-x)$ , მაშინ 1.1. ამოცანაში განმარტებული  $I$  ინვერ-

სიის ოპერატორი კომუტირებს ჰამილტონის  $\hat{H} = \frac{p_x^2}{2m} + V(x)$  ოპერატორთან.

1.46. აჩვენეთ, რომ პუასონის ფრჩხილი

$$\left\{ x, (\cos^2 \alpha)x \frac{d}{dx} + (\sin^2 \alpha) \frac{d}{dx} x \right\},$$

სადაც  $\alpha = const$ , დამოკიდებული არ არის  $\alpha$ -ზე.

1.47. აჩვენეთ, რომ პუასონის ფრჩხილი

$$\left\{ \frac{d}{dx}, (\cos^2 \alpha)x \frac{d}{dx} + (\sin^2 \alpha) \frac{d}{dx} x \right\},$$

სადაც  $\alpha = const$ , დამოკიდებული არ არის  $\alpha$ -ზე.

1.48. გამოთვალეთ პუასონის შემდეგი ფრჩხილი

$$-i\hbar\{(\vec{a}\nabla), \vec{r}\},$$

სადაც  $\vec{a}$  მუდმივი ვექტორია.

1.49. გამოთვალეთ პუასონის ფრჩხილი შემდეგი ოპერატორებისათვის:

$$\hat{A} = x^\alpha; \hat{B} = x^\beta \frac{d}{dx},$$

სადაც  $\alpha$  და  $\beta$  ნებისმიერი რიცხვებია.

1.50. გამოთვალეთ პუასონის შემდეგი ფრჩხილი

$$\left\{ \frac{d}{dx}, f(x) \right\}.$$

1.51. აჩვენეთ, რომ, თუ ნებისმიერი  $\chi$  ფუნქციისათვის სრულდება ტოლობა

$$\langle \chi, \varphi \rangle = \langle \chi, f \rangle,$$

მაშინ  $\varphi$  და  $f$  ფუნქციები ერთმანეთს ემთხვევა.

1.52. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{T}$  და  $\hat{S}$  ოპერატორები ნებისმიერი  $\varphi$  და  $f$  ფუნქციებისათვის აკმაყოფილებს პირობას

$$\langle \hat{T}\varphi, f \rangle = \langle \hat{S}\varphi, f \rangle,$$

მაშინ  $\hat{T}$  და  $\hat{S}$  ოპერატორები ერთმანეთს ემთხვევა.

1.53. აჩვენეთ, რომ ერმიტული ოპერატორების ნამრავლისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:  $(\hat{A}\hat{B})^+ = B^+ A^+$ .

1.54. დაამტკიცეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  ერმიტული ოპერატორია, მაშინ  $\hat{A}^n$ -იც ერმიტული ოპერატორია, სადაც  $n$  მთელი დადებითი რიცხვია.

1.55. დაამტკიცეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ერმიტული ოპერატორები კომუტირებენ, მაშინ  $\hat{A}\hat{B}$  ერმიტული ოპერატორია.

**მითითება:** გამოიყენეთ ტოლობა  $(\hat{A}\hat{B})^+ = B^+ A^+$ .

1.56. აჩვენეთ, რომ  $(\hat{A}^+)^+ = \hat{A}$ .

1.57. აჩვენეთ, რომ რიცხვის ერმიტულად შეუღლებული მის კომპლექსურად შეუღლებულს ემთხვევა, ანუ  $c^+ = c^*$ .

1.58. იპოვეთ  $\hat{A} = \frac{d}{dx}$  ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

**მითითება:** დაწერეთ  $\hat{A} = \frac{d}{dx}$  ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორის განმარტება ინტეგრალური სახით და ჩაატარეთ ნაწილობითი ინტეგრაცია.

1.59. იპოვეთ  $\hat{A} = \frac{d^n}{dx^n}$  ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

1.60.\* იპოვეთ 1.17 ამოცანის  $\hat{T}_a = e^{a\hat{p}}$  ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი.

1.61.\* იპოვეთ 1.18 ამოცანის  $\hat{T}_\alpha = e^{i\alpha \frac{d}{d\varphi}}$  ოპერატორის ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორი, სადაც  $\alpha$  ნამდვილი სიდიდეა.

1.62. დაამტკიცეთ, რომ ნამდვილ ფუნქციაზე გამრავლების ოპერატორი ერმიტულად შეუღლებული ოპერატორია.

1.63. აჩვენეთ, რომ  $\hat{L} = ia \frac{\partial}{\partial x}$  ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია, სადაც  $a$  ნამდვილი რიცხვია.

**მითითება:** გამოიყენეთ ერმიტულობის პირობა ინტეგრალური სახით.

1.64. აჩვენეთ, რომ  $\hat{L} = V(x)$  ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია.

1.65. აჩვენეთ, რომ  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია.

1.66. აჩვენეთ, რომ  $\frac{d}{dx}$ ;  $x \frac{d}{dx}$  და  $xp_x$  ოპერატორები არ არიან ერმიტული ოპერატორები.

1.67. აჩვენეთ, რომ  $\hat{L}\hat{L}^+$  და  $\hat{L}^+\hat{L}$  ოპერატორები ერმიტულია.



1.68. აჩვენეთ, რომ  $\hat{L} + L^+$  და  $i(\hat{L} - L^+)$  ოპერატორები ერმიტულია.

1.69. დაამტკიცეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ერმიტული არაკომუტირებადი ოპერატორებია, მაშინ: ა)  $[\hat{A}, \hat{B}]$  არაერმიტულია; ბ)  $i[\hat{A}, \hat{B}]$  ერმიტულია.

1.70. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{C}$  ოპერატორი ერმიტულია, მაშინ  $\hat{B} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^+$  ოპერატორიც ერმიტული ოპერატორია.

1.71. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  და  $\hat{C}$  ოპერატორები ერმიტულია, მაშინ ერმიტულია  $\hat{A}\hat{B}\hat{C} + \hat{C}\hat{B}\hat{A}$  და  $i(\hat{A}\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B}\hat{A})$  ოპერატორებიც.

1.72. აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი  $\hat{L}$  ოპერატორი შეიძლება შემდეგი სახით წარმოვადგინოთ:

$$\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B},$$

სადაც  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები ერმიტული ოპერატორებია.

1.73. მოცემულია  $\hat{L}$  არაერმიტული ოპერატორი. რა შემთხვევაში იქნება  $\hat{L}^2$  ოპერატორი ერმიტული?

**მიითითება:** ისარგებლეთ 1.72 ამოცანის შედეგით.

1.74. აჩვენეთ, რომ, თუ ოპერატორი ერმიტულია, მაშინ მისი შებრუნებული ოპერატორიც ერმიტულია.

1.75. აჩვენეთ, რომ ორი არაკომუტირებადი ერმიტული  $\hat{F}$  და  $\hat{G}$  ოპერატორის კომუტატორისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{D},$$

სადაც  $\hat{D}$  ერმიტული ოპერატორია.

## 1.2. საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. საშუალოს ცნება.

### პროექციული და უნიტარული ოპერატორები

1.76. იპოვეთ საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები შემდეგი ოპერატორებისა: ა)  $\hat{A} = \frac{d}{dx}$  და ბ)  $\hat{B} = i\frac{d}{dx}$ .

**მიითითება:** გაითვალისწინეთ, რომ საკუთარი ფუნქციები  $x \rightarrow \pm\infty$  ზღვარში სასრულო უნდა იყოს.

1.77. იპოვეთ  $\hat{A} = x + \frac{d}{dx}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

**მიითითება:** განაცალეთ ცვლადები საკუთარი ფუნქციების განტოლებაში.

1.78. იპოვეთ  $\hat{A} = -i \frac{d}{dx}$  ოპერატორის საკუთარი  $\psi$  ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები, თუ  $\psi(x) = \psi(x+a)$ , სადაც  $a$  მუდმივაა.

1.79. იპოვეთ  $\hat{A} = i \frac{d}{d\varphi}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

**მითითება:** გაითვალისწინეთ საკუთარი ფუნქციების ცალსახობიდან გამომდინარე პერიოდულობის თვისება  $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$ .

1.80.\* იპოვეთ  $\hat{A} = \sin \frac{d}{d\varphi}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

1.81.\* იპოვეთ  $\hat{A} = \cos \left( i \frac{d}{d\varphi} \right)$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

1.82.\* იპოვეთ  $\hat{A} = e^{ia \frac{d}{d\varphi}}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები.

1.83.\* იპოვეთ  $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები.

**მითითება:** შემოიღეთ ახალი ფუნქცია  $U = x\psi$  და მისთვის ამოხსენით საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება.

1.84. ცნობილია, რომ  $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi(x) = \cos 3x$ . იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობა.

1.85. მოცემულია შემდეგი ფუნქციები  $ax$ ,  $ax^2$ ,  $e^{ax}$ ,  $e^{ax^2}$ ,  $\ln ax$  და  $\sin ax$ . აჩვენეთ ამ ფუნქციებიდან რომელი ფუნქციაა საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა: ა)  $\frac{d}{dx}$ ; ბ)  $\frac{d^2}{dx^2}$ .

1.86. მოცემულია ფუნქციები ა)  $e^{-kx^2}$ ; ბ)  $x^2$  და გ)  $\cos kx + \sin kx$ . ამ ფუნქციათაგან რომელია  $\hat{L} = \frac{d^2}{dx^2}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქცია? იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობა.

1.87. იპოვეთ  $\hat{A}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, თუ მისი საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi(x)$  შემდეგ შემთხვევებში:

ა)  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2}; \Psi(x) = \sin 2x,$

ბ)  $\hat{A} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2; \Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$

1.88. იპოვეთ  $\hat{A}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, თუ მისი საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi(x)$  შემდეგ შემთხვევებში:

ა)  $\hat{A} = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{d}{dx};$  ბ)  $\Psi(x) = \frac{\sin \alpha x}{x}.$

1.89. იპოვეთ  $\hat{A}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, თუ მისი საკუთარი ფუნქციაა:

$$\hat{A} = \hat{p}_x; \Psi(x, y, z, t) = e^{\frac{i}{\hbar} kx} \Phi(y, z, t).$$

1.90. იპოვეთ საკუთარი ფუნქციები  $\Psi$  და საკუთარი მნიშვნელობები შემდეგი ოპერატორებისა:

$$-\frac{d^2}{dx^2}, \text{ თუ } \Psi = 0, x = 0 \text{ და } x = l\text{-თვის.}$$

1.91. იპოვეთ საერთო საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა:

ა)  $x$  და  $\hat{p}_y$ ; ბ)  $\hat{p}_x, \hat{p}_y$  და  $\hat{p}_z$  გ)  $p_x$  და  $p_x^2$ .

1.92. აჩვენეთ, რომ  $\Psi(\theta) = \cos \theta$  ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა

$$\hat{F} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \text{ ოპერატორის.}$$

1.93. აჩვენეთ, რომ  $\Psi(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$  ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა  $\hat{F} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi}$

ოპერატორის.

1.94. აჩვენეთ, რომ  $\Psi(\rho) = e^{-\rho/3} \rho^3$  ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა

$$\hat{F} = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{6}{\rho^2} \text{ ოპერატორის.}$$

1.95. მოცემულია, რომ  $\hat{L}\psi = \lambda\psi$ . აჩვენეთ, რომ  $\hat{L}^n\psi = \lambda^n\psi$ , სადაც  $n$  მთელი რიცხვია.

1.96. მოცემულია, რომ  $\hat{L}\psi = \lambda\psi$ . აჩვენეთ, რომ  $\hat{L}^{-1}\psi = \lambda^{-1}\psi$ .

1.97. იპოვეთ საკუთარი ფუნქცია და საკუთარი მნიშვნელობა კომპლექსურად შეუღლების ოპერატორისა

$$\hat{K}\psi(x) = \psi^*(x).$$

1.98. აჩვენეთ, რომ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები ნამდვილი სიდიდეებია.

1.99. ნრფივი  $\hat{L}$  ოპერატორის ერთ საკუთარ  $\lambda$  მნიშვნელობას შეესაბამება  $n$  ტალღური ფუნქცია, ანუ სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\hat{L}\Psi_1 = \lambda\Psi_1; \hat{L}\Psi_2 = \lambda\Psi_2; \dots; \hat{L}\Psi_n = \lambda\Psi_n$$

აჩვენეთ, რომ ამ პირობებში  $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$  ფუნქციებიდან შეგვიძლია შევადგინოთ უსასრულო რაოდენობის კომბინაციები, რომლებიც საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას აკმაყოფილებენ და რომელთაც იგივე  $\lambda$  საკუთარი მნიშვნელობა აქვთ.

1.100. იპოვეთ  $H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$  ჰამილტონიანის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები. განიხილეთ ორი შემთხვევა: ა) მოძრაობა არ არის შეზღუდული ანუ  $-\infty < x < \infty$ ; ბ)  $0 \leq x \leq a$ . ამ შემთხვევაში დაადგინეთ, რამდენჯერ ხდება ტალღური ფუნქცია ნული (კვანძების რიცხვი).

1.101. ერმიტული  $\hat{f}$  აკმაყოფილებს შემდეგ პირობას:

$$ა) \hat{f}^2 = c^2; \quad ბ) \hat{f}^2 = c\hat{f}; \quad გ) \hat{f}^3 = c^2\hat{f},$$

სადაც  $c$  ნამდვილი პარამეტრია. იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები ამ ოპერატორის.

1.102. იპოვეთ საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები ოპერატორისა  $\hat{f} = \alpha\hat{p} + \beta\hat{x}$ , სადაც  $\hat{p}$  იმპულსის ოპერატორია, ხოლო  $\hat{x}$  – კოორდინატის.

**მითითება:** ამოხსენით საკუთარი მნიშვნელობების დიფერენციალური განტოლება.

1.103.\* ერმიტულ  $\hat{f}$  ოპერატორს აქვს  $N$  განსხვავებული საკუთარი მნიშვნელობა. აჩვენეთ, რომ  $\hat{f}^N$  ოპერატორი ნრფივად გამოისახება  $\hat{1}, \hat{f}, \dots, \hat{f}^{N-1}$  ოპერატორის საშუალებით.

**მიითითება:** აჩვენეთ, რომ  $G = (\hat{f} - f_1)(\hat{f} - f_2) \dots (\hat{f} - f_N)$  ოპერატორის მოქმედება ნებისმიერ  $\Psi$  ფუნქციაზე იძლევა ნულს, ანუ  $G\Psi = 0$ , რის დასამტკიცებლადაც  $\Psi$  ფუნქცია გაშალეთ  $\hat{f}$  ოპერატორის საკუთარ  $\phi_{f_k}$  ფუნქციებად  $\Psi = \sum_{k=1}^N \phi_{f_k}$ .

1.104.\*  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{L}$  ოპერატორები აკმაყოფილებენ შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს:  $[\hat{A}, \hat{L}] = 0, [\hat{B}, \hat{L}] = 0, [\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ . აჩვენეთ, რომ  $\hat{L}$  ოპერატორის მნიშვნელობებს შორის აუცილებლად იქნება გადაგვარებული მნიშვნელობები.

1.105.\*  $\psi_A$  მდგომარეობაში სისტემას გააჩნია  $A$  სიდიდის განსაზღვრული მნიშვნელობა. აქვს თუ არა ამ მდგომარეობაში განსაზღვრული მნიშვნელობა  $B$  სიდიდეს, თუ ცნობილია, რომ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები: ა) არ კომუტირებენ; ბ) კომუტირებენ?

1.106. მდგომარეობაში, რომელიც აღინერება  $\Psi_{ab}$  ტალღური ფუნქციით,  $A$  და  $B$  ფიზიკურ სიდიდეებს გააჩნიათ გარკვეული მნიშვნელობები. რა შეიძლება ითქვას ამ სიდიდეების საკუთარ  $a$  და  $b$  მნიშვნელობებზე, თუ ცნობილია, რომ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორები ანტიკომუტირებენ ერთმანეთთან?

1.107. დაამტკიცეთ, რომ ერმიტული ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები ორთონორმირებულია.

1.108. დაამტკიცეთ, რომ ორთოგონალური ფუნქციები წრფივად დამოუკიდებელნი არიან.

**მიითითება:** დაწერეთ წრფივად დამოკიდებულების ტოლობა და ორთოგონალობის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ყველა კოეფიციენტი ამ ტოლობაში ნულია.

1.109. იპოვეთ  $\hat{f} = x - \frac{d}{dx}$  არაერმიტული ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. რა განსხვავებაა ერმიტული ოპერატორების შემთხვევისაგან?

1.110. იპოვეთ  $\hat{f} = x + \frac{d}{dx}$  არაერმიტული ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. რა განსხვავებაა ერმიტული ოპერატორების შემთხვევისაგან?

1.111.\*  $\phi_1$  და  $\phi_2$  ნორმირებული ფუნქციებია, რომელთაც ერთი და იგივე საკუთარი მნიშვნელობა შეესაბამება. ცნობილია, რომ:

$$\int \phi_1^* \phi_2 dx = d,$$

სადაც  $d$  ნამდვილი რიცხვია. იპოვეთ  $\phi_1$  და  $\phi_2$  ფუნქციების ნორმირებული წრფივი კომბინაცია, რომელიც ორთოგონალური იქნება:

ა)  $\phi_1$ -ის; ბ)  $\phi_1 + \phi_2$ -ის.

1.112. ნაწილაკი მოძრაობს  $x \in (0, b)$  ინტერვალში და მისი ტალღური ფუნქციაა  $\Psi(x) = ax(b-x)$ ; იპოვეთ ნაწილაკის კოორდინატისა და კინეტიკური ენერჯიის საშუალო.

1.113. გამოთვალეთ ნაწილაკის იმპულსის საშუალო  $\langle p_x \rangle$ , თუ მისი ტალღური ფუნქციაა: ა)  $e^{ikx}$ ; ბ)  $\cos kx$ ; გ)  $e^{-ax^2}$ . ყველა შემთხვევაში  $x \in (-\infty, \infty)$ .

1.114. დაამტკიცეთ, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში იმპულსის საშუალო-სათვის სამართლიანია ფორმულა:

$$\langle p_x \rangle = \frac{i\hbar}{2} \int \left( \psi \frac{d\psi^*}{dx} - \psi^* \frac{d\psi}{dx} \right) dx.$$

1.115.\* დაამტკიცეთ, რომ დისკრეტული სპექტრის სტაციონარულ მდგომარეობებში ნაწილაკის იმპულსის პროექციის საშუალო მნიშვნელობა ნულია.

**მითითება:** გამოიყენეთ 1.43 ამოცანაში დამტკიცებული  $[\hat{H}, x] = -\frac{i\hbar}{m} \hat{p}_x$  თანაფარდობა.

1.116. დროის გარკვეულ მომენტში ნაწილაკი იმყოფება მდგომარეობაში

$$\psi(x) = A e^{ikx - \frac{x^2}{a^2}},$$

სადაც  $A$  და  $a$  მუდმივებია. იპოვეთ  $\langle x \rangle$  და  $\langle p_x \rangle$ .

1.117.\* სისტემა იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღინერება ნორმირებული  $\psi(x)$  ტალღური ფუნქციით და ის შეიძლება გაიშალოს ერმიტული  $\hat{A}$  ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად, ანუ  $\psi(x) = \sum_k c_k \phi_k(x)$ . ჩათვალეთ, რომ  $\phi_k(x)$  ფუნქციები ნორმირებულია ერთიანზე.

ა) მიიღეთ გამოსახულება, რომელიც განსაზღვრავს  $c_k$  კოეფიციენტებს.

ბ) აჩვენეთ, რომ საშუალო მნიშვნელობა ტოლია

$$\langle A \rangle = \sum_k A_k |c_k|^2,$$

სადაც  $A_k$  საკუთარი მნიშვნელობებია  $\hat{A}$  ოპერატორის. რა ფიზიკური აზრი აქვს  $|c_k|^2$ -ს?

1.118.\* ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია გაუსის განაწილებას ემთხვევა –

$$\psi(x) = A e^{-\lambda(x-a)^2},$$

სადაც  $A, a$  და  $\lambda$  დადებითი ნამდვილი მუდმივებია. ნორმირების პირობიდან იპოვეთ  $A$ . ასევე იპოვეთ  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  და  $\sigma_x$

**მიითითება:** ამ და ქვემოთ მოყვანილ რამდენიმე ამოცანაში ისარგებლეთ ცხრილის ინტეგრალებით, რომლებიც მოცემულია კრებულის დამატებაში A.

1.119. წყალბადის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(r) = Ae^{-\frac{r}{a_0}}, \text{ სადაც } a_0 \text{ პირველი ბორის რადიუსია } \left( a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} \right), m \text{ ელექტრონის მასაა, } e - \text{ ელექტრონის მუხტი, } A - \text{ ნორმირების მუდმივა. ელექტრონის ბირთვთან ურთიერთქმედების პოტენციური ენერგიაა } U(r) = -\frac{e^2}{r}. \text{ განსაზღვრეთ } A \text{ და პოტენციური ენერგიის საშუალო } \langle U \rangle.$$

1.120. მოცემულია ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია  $\Psi(x,t) = Ae^{-\lambda|x|}e^{-i\omega t}$ , სადაც  $A$ ,  $\lambda$  და  $\omega$  დადებითი ნამდვილი მუდმივებია. იპოვეთ  $A$ ,  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  და ნაწილაკის პოვნის ალბათობა  $(-\sigma_x, \sigma_x)$  ინტერვალში. გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვემა ფუნქციის ლუნობა.

1.121.  $m$  მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან მოძრაობას  $(0, l)$  ინტერვალში. მისი ტალღური ფუნქციაა  $\Psi(x) = A \sin \frac{\pi x}{l}$ . იპოვეთ  $A$ ,  $\langle x \rangle$ ,  $\langle p_x \rangle$  და  $\langle E_k \rangle$ .

1.122.  $m$  მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან მოძრაობას და  $t = 0$  მომენტში მისი ტალღური ფუნქციაა  $\Psi(x) = Ae^{-\frac{x^2}{a^2} + ikx}$ , სადაც  $A, k$  და  $a$  მუდმივებია. იპოვეთ  $A$ ,  $\langle x \rangle$ ,  $\langle p_x \rangle$  და  $\langle E_k \rangle$ . გაითვალისწინეთ ინტეგრალქვემა ფუნქციის ლუნობა.

1.123. მოცემულია ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია  $\Psi(x) = C\phi(x)\exp\frac{ip_0x}{\hbar}$ , სადაც  $\phi(x)$  ნამდვილი ფუნქციაა. აჩვენეთ, რომ  $p_0$  ნაწილაკის საშუალო იმპულსია მოცემულ მდგომარეობაში.

1.124. ნაწილაკის მდგომარეობა აღინერება ტალღური ფუნქციით  $\Psi(x) = C\varphi(x)\exp\left\{\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right\}$ , სადაც  $p_0$ ,  $x_0$ ,  $a$  ნამდვილი პარამეტრე-

ბია. იპოვეთ  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\sigma_x$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$ ,  $\sigma_p$ .

1.125.  $t = 0$  მომენტში ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} A \frac{x}{a}; & 0 \leq x \leq a; \\ A \frac{b-x}{b-a}; & a \leq x \leq b; \\ 0; & x < 0, x > b, \end{cases}$$

სადაც  $A, a, b$  მუდმივებია.

ა) დაანორმირეთ ტალღური ფუნქცია  $\Psi$ , ანუ  $A$  გამოსახეთ  $a$  და  $b$ -ს საშუალებით.

ბ) სად არის მოსალოდნელი ნაწილაკის პოვნა ყველაზე დიდი ალბათობით  $t = 0$  მომენტში?

გ) იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობა  $a$  ნერტილის მარცხნივ. რას უდრის ეს ალბათობა, როცა  $b = a$  და  $b = 2a$ ?

დ) იპოვეთ  $\langle x \rangle$ .

1.126. აჩვენეთ, რომ საშუალო მნიშვნელობები ერმიტული ოპერატორებისა  $\hat{L}\hat{L}^+$  და  $\hat{L}^+\hat{L}$  ( $\hat{L}$  წრფივი ოპერატორია) ნებისმიერ მდგომარეობაში არაუარყოფითია.

1.127. იპოვეთ კავშირი ნაწილაკის კოორდინატისა და იმპულსის საშუალოებს შორის, რომელთა ტალღურ  $\Psi_1$  და  $\Psi_2$  ფუნქციებს შორის შემდეგი კავშირია:

ა)  $\Psi_2(x) = \Psi_1(x+a)$ ;    ბ)  $\Psi_2(x) = \Psi_1(x)\exp\frac{ip_0x}{\hbar}$ .

1.128.\* ერმიტულ  $\hat{f}(\lambda)$  ოპერატორს გააჩნია დისკრეტული სპექტრი და დამოკიდებულია  $\lambda$  პარამეტრზე. დაამტკიცეთ, რომ სრულდება შემდეგი თანაფარდობა:

$$\frac{\partial f_n(\lambda)}{\partial \lambda} = \left\langle \frac{\partial f(\lambda)}{\partial \lambda} \right\rangle,$$

სადაც  $n$  ინდექსით დანომრილია საკუთარი მნიშვნელობები და ტოლობის მარჯვენა მხარეს გასაშუალოება ხდება  $\Psi_n(\lambda; q)$  ტალღური ფუნქციით.



**მიითითება:** საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება  $\hat{f}(\lambda)\Psi_n(\lambda; q) = f_n(\lambda)\Psi_n(\lambda; q)$  გაანარმოეთ  $\lambda$  პარამეტრით და გამოიყენეთ  $\hat{f}(\lambda)$  ოპერატორის ერმიტულობა.

1.129.  $f$  ფიზიკური სიდიდის  $\hat{P}(f_i)$  პროექციული ოპერატორი ენოდება წრფივ ოპერატორს, რომლის მოქმედება  $\Psi_{f_k}$  ფუნქციაზე შემდეგნაირად განიმარტება:

$$\hat{P}(f_i)\Psi_{f_k} = \delta_{f_i, f_k} \Psi_{f_i} = \begin{cases} \Psi_{f_i}; & f_i = f_k \\ 0; & f_i \neq f_k \end{cases}$$

აჩვენეთ, რომ  $\hat{P}(f_i)$  ოპერატორს შემდეგი თვისებები აქვს:

ა) ერმიტული ოპერატორია;    ბ)  $\hat{P}^2(f_i) = \hat{P}(f_i)$ .

**მიითითება:** გამოიყენეთ სისრულის პირობა, ანუ ნებისმიერი ფუნქცია გაშალეთ  $\Psi_{f_k}$  ფუნქციებად და ჯამზე იმოქმედეთ  $\hat{P}(f_i)$  ოპერატორით.

1.130. რა ფიზიკური აზრი აქვს  $\hat{P}(f_i)$  პროექციული ოპერატორის საშუალოს  $\langle \hat{P}(f_i) \rangle$  ნებისმიერი  $\Psi$  ტალღური ფუნქციით აღწერილ მდგომარეობაში?

**მიითითება:** გამოიყენეთ სისრულის პირობა, საშუალოს განმარტების ფორმულა და  $\Psi_{f_k}$  ფუნქციების ორთონორმირების პირობა.

1.131. იპოვეთ პროექციული ოპერატორი  $\hat{P}_{\pm}$ , რომელიც კოორდინატების ინვერსიის მიმართ აპროექტირებს ლუნ  $P_+$  და  $P_-$  კენტ მდგომარეობებში.

აჩვენეთ, რომ ა)  $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$ ; ბ)  $P_+ + P_- = 1$ .

1.132. აჩვენეთ, რომ უნიტარული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები მოდულით ერთის ტოლია.

1.133. უნიტარული ოპერატორი აკმაყოფილებს პირობას  $\hat{U}^2 = \hat{U}$ . იპოვეთ ცხადი სახე ამ ოპერატორის.

1.134. მოცემულია  $\hat{U}$  უნიტარული ოპერატორი. რა შემთხვევაში იქნება უნიტარული შემდეგი ოპერატორი  $\hat{A} = c\hat{U}$ , სადაც  $c$  რიცხვია.

1.135. აჩვენეთ, რომ ორი უნიტარული ოპერატორის ნამრავლი უნიტარული ოპერატორია.

1.136. შეიძლება თუ არა უნიტარული ოპერატორი ერმიტულიც იყოს?

1.137. აჩვენეთ, რომ  $\hat{U} = \exp(i\hat{F})$  ოპერატორი (სადაც  $\hat{F}$  ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია) უნიტარული ოპერატორია.

**მიითითება:** გაშალეთ ექსპონენტი მნიშვნავად და გამოიყენეთ  $\hat{F}$  ოპერატორის ერმიტულობა.

1.138.\* აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ერმიტული ოპერატორები კომუტირებენ, მაშინ  $\hat{U} = \frac{\hat{A} + i\hat{B}}{\hat{A} - i\hat{B}}$  ოპერატორი უნიტარული ოპერატორია. წარმოადგინეთ ამ სახით 1.137 ამოცანის  $\hat{U} = \exp(i\hat{F})$  უნიტარული ოპერატორი.

**მიითითება:** წინასწარ დაამტკიცეთ დამხმარე თანაფარდობა  $(\hat{L}^{-1})^+ = (\hat{L}^+)^{-1}$

1.139.\* აჩვენეთ, რომ ოპერატორის უნიტარული გარდაქმნებისას  $\hat{A}' = \hat{U}\hat{A}\hat{U}^+$  შემდეგი ტიპის ალგებრული თანაფარდობები ოპერატორებს შორის –

$$\hat{F}(\hat{A}_i) = c_0 + \sum_i c_i \hat{A}_i + \sum_{i,k} c_{i,k} \hat{A}_i \hat{A}_k + \dots = 0$$

ინარჩუნებს სახეს, ანუ  $\hat{F}(\hat{A}'_i) = 0$ .

**მიითითება:** განიხილეთ უნიტარული გარდაქმნა  $\hat{F}' = \hat{U}\hat{F}\hat{U}^+$  და ჯამის ყველა წევრის მამრავლებში ჩასვით  $\hat{U}^+\hat{U} = 1$ .

## თავი 2. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

შრედინგერის სტაციონარული განტოლება

$$\hat{H}\psi \equiv \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x) \right] \psi(x) = E\psi(x) \quad (2.1)$$

სათანადო სასაზღვრო პირობებით (ტალღური ფუნქციის და მისი პირველი წარმოებულის უწყვეტობა, სასრულობა მთელ სივრცეში, ცალსახობა) განსაზღვრავს  $U(x)$  პოტენციურ ველში ნაწილაკის ენერგეტიკულ სპექტრს და სტაციონარული მდგომარეობების ტალღურ ფუნქციებს.

ნაწილაკის აღმოჩენის  $dW$  ალბათობა  $x$ -დან  $x + dx$ -მდე ინტერვალში, გამომისახება ფორმულით:

$$dW = |\psi|^2 dx \quad (2.2)$$

$W$  ალბათობა იმისა, რომ ნაწილაკი აღმოჩნდება  $x_1$ -დან  $x_2$ -მდე ინტერვალში, შეიძლება იპოვოს მითითებულ ინტერვალში ინტეგრებით:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \quad (2.3)$$

ენერგიის სპექტრი  $E_n$  არეში

$$U(x) < E_n < U(\pm\infty) \quad (2.4)$$

დისკრეტულია. შევნიშნოთ, რომ (2.4) არეში კლასიკურ მექანიკაში ნაწილაკს შეუძლია მხოლოდ ფინიტური მოძრაობა. ეს  $E_n$  დონეები გადაუგვარებელია, ხოლო შესაბამისი საკუთარი  $\psi_n$  ფუნქციები კვადრატულად ინტეგრებადია.

$$E_n > \min U(\pm\infty) \quad (2.5)$$

არეში ენერგიის სპექტრი უწყვეტია.

$$E_n > \max U(\pm\infty) \quad (2.6)$$

არეში ენერგეტიკული სპექტრი ორჯერადად გადაგვარებულია. (2.6) არეში კლასიკურ მექანიკაში შესაძლოა ინფინიტური მოძრაობა ორივე მიმართულებით  $x \rightarrow \pm\infty$ .

როდესაც ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა პოტენციურ ჯებირს, ტალღურ ფუნქციას შემდეგი ასიმპტოტიკა გააჩნია:

$$\psi^+(x) \approx \begin{cases} e^{ik_1x} + A(E)e^{-ik_1x}, & x \rightarrow -\infty \\ B(E)e^{ik_2x}, & x \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (2.7)$$

სადაც  $k_{1,2} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U(\pm\infty))}$ .  $A(E)$  და  $B(E)$  ამპლიტუდები განსაზღვრავენ გაჟონვის

$$D(E) = \frac{k_2}{k_1} |B|^2 \quad (2.8)$$

და არეკვლის

$$R(E) = |A|^2 \quad (2.9)$$

კოეფიციენტებს.

## 2.1. დისკრეტული სპექტრი. სტაციონარული მდგომარეობები

2.1. აჩვენეთ, რომ, თუ სისტემის ჰამილტონიანი ლუნია  $\hat{H}(x) = \hat{H}(-x)$ , მაშინ სისტემის ტალღურ ფუნქციებს გააჩნიათ გარკვეული ლუნობა, ანუ, ან ლუნი, ან კენტი ფუნქციები არიან.

2.2.  $m$  მასის ნაწილაკი ასრულებს ერთგანზომილებიან თავისუფალ მოძრაობას. იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ენერგია და ტალღური ფუნქცია.

2.3. აჩვენეთ, რომ, თუ პოტენციურ ი ენერგია შეიძლება ჩავწეროთ შემდეგი სახით:  $V(x_1, x_2, x_3) = V_1(x_1) + V_2(x_2) + V_3(x_3)$ , მაშინ დროზე დამოუკიდებელი შრედიგერის განტოლება შეიძლება ჩაინეროს 3 ერთგანზომილებიანი განტოლების სახით:

$$\frac{d^2\psi_i(x_i)}{dx_i^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E_i - V_i(x_i)]\psi_i(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

ამასთან,  $\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3)$  და  $E = E_1 + E_2 + E_3$ .

2.4. დროზე დამოუკიდებელი ტალღური ფუნქცია ანუ შრედიგერის განტოლების

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)]\psi(x) = 0$$

ამონახსნი შეესაბამება ბმულ ან არაბმულ მდგომარეობებს. დავუშვათ, რომ ზღვარი  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} = V_{\pm}$  არსებობს და  $V_+ < V_-$ . როდის გვაქვს ბმული მდგომარეობები

შემდეგ შემთხვევებში: ა) თუ  $E > V_-$ ; ბ) თუ  $V_- > E > V_+$ ; გ) თუ  $E < V_+$ . რა ხდება, თუ  $V_+ = V = V_0$ ?

2.5.\* აჩვენეთ, რომ ერთგანზომილებიან შემთხვევაში დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები გადაუგვარებელია.

**მითითება:** დავუშვათ სანინალმდეგო, ანუ ერთ დონეს 2 დამოუკიდებელი ფუნქცია შეესაბამება. დანერეთ მათთვის ორჯერ შრედინგერის ერთგანზომილებიანი სტაციონარული განტოლება და აჩვენეთ, რომ ეს ორი ფუნქცია ერთმანეთზე დამოკიდებული გამოვა.

2.6.  $m$  მასის ნაწილაკი მოძრაობს  $V(x)$  პოტენციურ ველში. გარკვეულ არეში ველი მუდმივია  $V(x) = V_0$ . ამ არისათვის იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციები, თუ: ა)  $E > V_0$ ; ბ)  $E < V_0$ ; გ)  $E = V_0$ , სადაც  $E$  არის ნაწილაკის ენერგია.

2.7. იპოვეთ ენერგეტიკული დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები  $m$  მასის ნაწილაკის სტაციონარული მდგომარეობებისა უსასრულო სიმაღლის  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < a \\ \infty, & x < 0, x > a \end{cases}$$

გამოარკვეთ მიღებული ტალღური ფუნქციების სიმეტრიის თვისებები კოორდინატების ინვერსიისას ორმოს ცენტრის მიმართ, ანუ  $x' = -x + a$  გარდაქმნისას.

2.8. აჩვენეთ, რომ 2.7 ამოცანის ტალღური ფუნქციები ორთოგონალურია.

2.9. იპოვეთ  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\sigma_x$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$ ,  $\sigma_p$  2.7 ამოცანის შემთხვევაში.

2.10. იპოვეთ 2.7 ამოცანაში ნაწილაკის  $E$  ენერგია, თუ ცნობილია ორმოს საზღვარზე ( $x = 0$ ) ტალღური ფუნქციის ნარმოებულის  $\frac{d\psi}{dx}$  მნიშვნელობა ანუ  $\psi'(0)$ .

2.11.\* აჩვენეთ, რომ 2.7 ამოცანაში არ შეიძლება არსებობდეს  $E = 0$  და  $E < 0$  მდგომარეობები.

**მითითება:** აჩვენეთ, რომ შრედინგერის განტოლებაში  $E = 0$  და  $E < 0$  მდგომარეობებისთვის  $\psi(0) = \psi(a) = 0$  პირობა მიგვიყვანს იქამდე, რომ  $\psi \equiv 0$  მთელ  $0 \leq x \leq a$  არეში.

2.12. ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში. იპოვეთ ნაწილაკის მასა, თუ ორმოს სიგანეა  $a$  და ენერგიის სხვაობა მე-3 და მე-2 ენერგეტიკულ დონეებს შორის არის  $\Delta E$ .

2.13. ნანილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ  $a$  სიგანის ორმოში. იპოვეთ რიცხვი  $dN$  ენერგეტიკული დონეებისა ( $E, E + dE$ ) ინტერვალში, თუ ენერგეტიკული დონეები ძალიან მჭიდროდ არიან განლაგებული.

2.14. ნანილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ  $a$  სიგანის ორმოში. იპოვეთ:

ა) წნევის ძალა, რომელსაც ნანილაკი აწარმოებს კედლებზე,

ბ) მუშაობა, რომელიც უნდა შევასრულოთ, რომ ორმო ნელა შევკუმშოთ  $\eta$ -ჯერ.

2.15. ნანილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ  $a$  სიგანის ორმოში. იპოვეთ ნანილაკის  $\frac{a}{3} < x < \frac{2a}{3}$  არეში პოვნის ალბათობა.

2.16.  $m$  მასის ნანილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში. ნანილაკის ადგილმდებარეობის სიმკვრივის ალბათობის მაქსიმალური მნიშვნელობაა  $P_m$ . იპოვეთ ორმოს  $a$  სიგანე და მოცემულ მდგომარეობაში ნანილაკის  $E$  ენერგია.

2.17.  $m$  მასის ნანილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში. ორმოს გვერდებს მყისიერად და სიმეტრიულად აფართოებენ  $2a$  სიგანემდე. როგორია იმის ალბათობა, რომ ამ გაფართოებულ ორმოში ნანილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში?

**მითითება:** საწყისი ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია გაშალეთ გაფართოებული ორმოს ტალღურ ფუნქციებად.

2.18. აჩვენეთ, რომ შრედინგერის დროითი განტოლების სტაციონარული მდგომარეობები მიიღება მხოლოდ მაშინ, როცა პოტენციალი  $U$  არ არის დროზე დამოკიდებული.

2.19. როგორ შეიცვლება სტაციონარული მდგომარეობის აღმწერი სრული ტალღური ფუნქცია  $\Psi(x, t)$ , თუ შევცვლით პოტენციურ ენერგიის ათვის ნერტილს გარკვეული  $\Delta U$  სიდიდით.

2.20. იპოვეთ შრედინგერის დროითი განტოლების ამონახსნი თავისუფალი ნანილაკისთვის, რომელიც მოძრაობს  $P$  იმპულსით  $X$  ღერძის დადებით მიმართულებით.

2.21. აჩვენეთ, რომ თავისუფლად მოძრავი ნანილაკის ენერგიამ შეიძლება ნებისმიერი მნიშვნელობა მიიღოს.

2.22.  $K'$  ინერციული სისტემა  $\vec{V}_0$  სიჩქარით მოძრაობს  $K$  ინერციული სისტემის მიმართ. იპოვეთ  $K$  სისტემაში არარელატივისტურად მოძრავი თავისუფალი  $m$  მასის ნანილაკის  $\Psi(x, t)$  ტალღური ფუნქციის კავშირი მის ტალღურ ფუნქცი-

ასთან  $\Psi'(x', t)$   $K'$  სისტემაში. სიმარტივისათვის ჩავთვალოთ, რომ ნაწილაკის სიჩქარე  $K'$  სისტემაში მიმართულებით ემთხვევა  $\vec{V}_0$ -ს.

2.23. გამოარკვეით, არის თუ არა  $\Psi(x, t) = \sum \psi_k(x) e^{i\omega_k t}$  ტალღური ფუნქცია, რომელიც წარმოადგენს სტაციონარული მდგომარეობების სუპერპოზიციას, შრედინგერის დროითი და სტაციონარული განტოლებების ამონახსნი.

2.24. ნაწილაკის ყოფაქცევა ერთგანზომილებიან ორმოში  $x \in (0, a)$  აღინერება საწყისი ტალღური ფუნქციით  $\Psi(x, 0) = Ax(a - x)$ , სადაც  $A$  მუდმივაა. იპოვეთ  $A, \langle x \rangle, \langle p \rangle, \langle H \rangle$   $t = 0$  მომენტში.

2.25.\* ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში. იპოვეთ  $\langle x \rangle$  მდგომარეობაში, რომელიც წარმოადგენს ორი უმდაბლესი მდგომარეობის სუპერპოზიციას თანაბარი წონებით.

**მიითითება:** გვაქვს  $\Psi_1 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-\frac{i\pi^2 \hbar t}{2a^2 m}}$ ;  $\Psi_2 = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a} e^{-\frac{i2^2 \pi^2 \hbar t}{2a^2 m}}$  და

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^a \Psi_1^* \hat{x} \Psi_1 dx + \int_0^a \Psi_2^* \hat{x} \Psi_2 dx + \int_0^a \Psi_1^* \hat{x} \Psi_2 dx + \int_0^a \Psi_2^* \hat{x} \Psi_1 dx \right\}. \text{ დათვალეთ თი-}$$

თოეული ინტეგრალი.

2.26.\* იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები სწორკუთხა პოტენციურ ორმოში:

$$\begin{aligned} V(x) &= -V_0; & |x| < a \\ V(x) &= 0; & |x| \geq a \end{aligned}$$

**მიითითება:** დაწერეთ შრედინგერის განტოლება სათანადო არეებში და მოახდინეთ ტალღური ფუნქციის „შეკერვა“  $x = -a$  და  $x = a$  წერტილებში.

2.27.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან სიმეტრიულ ორმოში:

$$\begin{aligned} V(x) &= 0; & |x| < a \\ V(x) &= V_0; & |x| \geq a \end{aligned}$$

მიიყვანეთ ენერგიის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება  $E < V_0$  არეში შემდეგ სახემდე:

$$ka = n\pi - 2 \arcsin \frac{\hbar k}{\sqrt{2mV_0}},$$

სადაც  $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$  და  $n$  მთელი რიცხვია.

2.28. ისარგებლეთ წინა 2.27 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ  $a^2V_0$  სიდიდის მნიშვნელობა, რომლის დროსაც:

ა) ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაა  $E = \frac{V_0}{2}$ ;

ბ) ჩნდება მეორე დონე, ნებისმიერი  $n$  დონე. რამდენ დონეს შეიცავს მოცემული ორმო, თუ  $a^2U_0 = \frac{75\hbar^2}{m}$  ?

2.29.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება 2.27 ამოცანის ორმოში. იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის  $E_1$  ენერგია, თუ ტალღური  $\psi$  ფუნქციის მნიშვნელობა ორმოს კიდებზე ორჯერ მცირეა, ვიდრე ორმოს შუაში.

2.30.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან  $U(x)$  პოტენციურ ველში სტაციონარულ მდგომარეობაში, რომლის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:  $\psi(x) = Ae^{-\alpha x^2}$ , სადაც  $A$  და  $\alpha$  მოცემული მუდმივებია ( $\alpha > 0$ ). გაითვალისწინეთ, რომ  $U(0) = 0$  და იპოვეთ  $U(x)$  და ნაწილაკის  $E$  ენერგია.

2.31.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან  $U(x)$  პოტენციურ ველში სტაციონარულ მდგომარეობაში, რომლის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:  $\psi(x) = Axe^{-\alpha x}$ , თუ  $x > 0$ ;  $\psi(x) = 0$ , თუ  $x < 0$  და  $U(x) \rightarrow 0$ , თუ  $x \rightarrow \infty$ . იპოვეთ  $U(x)$  და ნაწილაკის  $E$  ენერგია.

2.32. იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები სწორკუთხა პოტენციურ ორმოში:

$$\begin{aligned} V(x) &= \infty; & x < 0 \\ V(x) &= -V_0; & 0 < x < a \\ V(x) &= 0; & x > a \end{aligned}$$

2.33.\* იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები ასიმეტრიულ პოტენციურ ორმოში:

$$\begin{aligned} V(x) &= V_2; & x < 0 \\ V(x) &= 0; & 0 < x < a; & V_2 > V_1 > 0 \\ V(x) &= V_1; & x > a \end{aligned}$$



2.34.\* იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერგეტიკული დონეები ასიმეტრიულ პოტენციურ ორმოში:

$$V(x) = \infty; \quad x < 0$$

$$V(x) = V_1; \quad 0 < x < a$$

$$V(x) = V_2; \quad a < x < b; \quad V_2 > V_3 > V_1 > 0$$

$$V(x) = V_3; \quad b < x < c$$

$$V(x) = \infty; \quad x > c$$

2.35.\* იპოვეთ ნორმალიზებული ტალღური ფუნქციები პოტენციურ ორმოში:

$$V(x) = \infty; \quad x < 0$$

$$V(x) = V_1; \quad 0 < x < a$$

$$V(x) = V_2; \quad a < x < b \quad V_2 > V_1 > 0$$

$$V(x) = \infty; \quad x > b$$

იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობები  $0 < x < a$  და  $a < x < b$  ინტერვალებში.

2.36.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ერთგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში:

$$U(x) = \begin{cases} \infty; & x \leq 0, \\ 0; & 0 < x < l, \\ U_0; & x \geq l \end{cases}$$

იპოვეთ:

ა) ენერგიის განმსაზღვრელი განტოლება  $E < U_0$  არეში. დავიყვანოთ ის შემდეგ თანაფარდობამდე:

$$\sin kl = \pm kl \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ml^2 U_0}}; \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar};$$

ბ) მინიმალური მნიშვნელობა  $l^2 U_0$  სიდიდისა, რომლის დროსაც ჩნდება პირველი და ნებისმიერი  $n$  დონე. რამდენ დონეს შეიცავს ორმო, რომლისთვისაც

$$l^2 U_0 = \frac{75\hbar^2}{m} ?$$

2.37. წინა 2.36 ამოცანაში ერთადერთი დონის ენერგიაა  $E = \frac{U_0}{2}$ .

ამ ამოცანის ამოხსნების გამოყენებით, განსაზღვრეთ:

ა)  $l^2 U_0$  სიდიდის მნიშვნელობა ასეთი ორმოსათვის,

ბ) ნაწილაკის კოორდინატის ყველაზე უფრო ალბათური მნიშვნელობა,

გ) ნაწილაკის პოვნის ალბათობა  $x > l$  არეში.

2.38.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ერთგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში:

$$U(x) = \begin{cases} \infty; & x \leq l, \\ 0; & -l < x \leq 0, \\ U_0; & 0 < x < l \\ \infty; & x \geq l \end{cases}$$

აჩვენეთ, რომ,  $E > U_0$ -ის დროს, განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს ენერგიის მნიშვნელობებს, შემდეგი სახე აქვს:

$$k_2 \operatorname{tg} k_1 l = -k_1 \operatorname{tg} k_2 l,$$

სადაც

$$k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}$$

2.39. განიხილეთ წინა 2.38 ამოცანაში  $E < U_0$  შემთხვევა და აჩვენეთ, რომ:

ა) განტოლებას, რომელიც განსაზღვრავს ენერგიის მნიშვნელობებს, შემდეგი სახე აქვს:

$$\lambda \operatorname{tg} k l = -k \operatorname{th} \lambda l,$$

სადაც

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \quad \lambda = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$$

და  $\operatorname{th}$  არის ჰიპერბოლური ტანგენსი;

ბ) იპოვეთ  $l^2 U_0$  მნიშვნელობათა ინტერვალი, როდესაც  $E < U_0$  არეში არ გვექნება არცერთი დონე; გვექნება მხოლოდ ერთი დონე.

2.40. აჩვენეთ, რომ დისკრეტული სპექტრის სტაციონარულ მდგომარეობაში მყოფ ნაწილაკზე მოქმედი საშუალო ძალა ნულის ტოლია.

2.41.\* პოტენციურ ენერგიას აქვს სასრულო წყვეტა  $x = x_0$  წერტილში. გამოარკვიეთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილში.

**მითითება:** დაწერეთ შრედინგერის განტოლება ასეთი პოტენციალისათვის და აინტეგრეთ მიღებული განტოლება  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$  არეში, შემდეგ კი  $\varepsilon \rightarrow 0$  ზღვარი აიღეთ.

2.42. პოტენციურ ენერგიას აქვს უსასრულო სიმაღლის ბარიერი  $x = x_0$  წერტილში. გამოარკვიეთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა ამ წერტილში.

2.43.\* პოტენციალს აქვს სახე  $U(x) = \bar{U}(x) + \alpha\delta(x - x_0)$ , სადაც  $\delta(x)$  დირაკის დელტა ფუნქციაა, ხოლო  $\bar{U}(x)$  – შემოსაზღვრული ფუნქცია. როგორ იქცევა შრედინგერის განტოლების ამონახსნი  $\psi(x)$  და მისი წარმოებული  $x_0$  წერტილში?

**მიითითება:** დაწერეთ შრედინგერის განტოლება  $U(x) = \bar{U}(x) + \alpha\delta(x - x_0)$  პოტენციალისათვის და აინტეგრეთ მიღებული განტოლება  $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$  არეში, შემდეგ კი  $\varepsilon \rightarrow 0$  ზღვარი აიღეთ.

2.44. იპოვეთ ენერჯის დონეები და ნორმირებადი ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს  $U(x) = -\alpha\delta(x)$  ველში.

2.45. წინა 2.44 ამოცანაში იპოვეთ: ა) საშუალო მნიშვნელობა კინეტიკური და პოტენციური ენერჯისა, მიღებული ერთადერთი მდგომარეობისათვის; ბ) ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში.

2.46. ამოხსენით შრედინგერის დროზე დამოუკიდებელი განტოლება შემდეგი პოტენციალისათვის:

$$V(x) = \begin{cases} \alpha\delta(x); & -a < x < a \\ \infty; & |x| \geq a; \alpha > 0 \end{cases}$$

ცალ-ცალკე განიხილეთ ლუნი და კენტი მდგომარეობები.

2.47. განიხილეთ პოტენციალი

$$V(x) = \begin{cases} \infty; & x < 0 \\ \alpha\delta(x - a); & x \geq 0 \end{cases}$$

სადაც  $a$  და  $\alpha$  დადებითი ნაღვილი რიცხვებია.

ა) ამოხსენით შრედინგერის განტოლება ამ პოტენციალისათვის;

ბ) ენერჯია გამოდის კომპლექსური. გაარკვიეთ, ხომ არ ეწინააღმდეგება

ეს ფაქტი იმას, რომ ნორმირებული სტაციონარული მდგომარეობებისათვის  $E$  ნამდვილი სიდიდეა.

2.48. იპოვეთ ნაწილაკის ენერჯის დონეები და ტალღური ფუნქცია, რომელიც იმ-

ყოფება ერთგანზომილებიან კულონურ ველში  $V(x) = -\frac{e^2}{|x|}$

2.49. იპოვეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ენერჯის სპექტრი და ტალღური ფუნქციები, რომლის ჰამილტონიანია:

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2.$$

2.50. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგი პოტენციური ენერჯიის ველში:

$$V(x) = \begin{cases} \infty; & x \leq 0; \\ \frac{m\omega^2}{2}x^2; & x > 0 \end{cases}$$

იპოვეთ ენერჯიის სპექტრი.

2.51. ჰარმონიული ოსცილატორისათვის იპოვეთ იმპულსების სხვადასხვა მნიშვნელობის განაწილების ალბათობა.

2.52. იპოვეთ ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორისა, რომელიც მოთავსებულია მუდმივ ელექტრულ  $\vec{E}$  ველში. ნაწილაკის მუხტია  $e$ .

2.53.\* დათვალეთ: ა)  $\langle x \rangle, \langle x^2 \rangle, \langle p \rangle, \langle p^2 \rangle$  ჰარმონიული ოსცილატორის  $\psi_0$  და  $\psi_1$  მდგომარეობებში; ბ) შეამონმეთ ჰაიზენბერგის განუზღვრელობის თანაფარდობა ამ მდგომარეობებისათვის; გ) დათვალეთ საშუალო კინეტიკური  $\langle T \rangle$  და პოტენციური  $\langle V \rangle$  ენერჯიები ამ მდგომარეობებში.

**მითითება:** გამოთვლების გამარტივების მიზნით ისარგებლეთ  $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$  ცვლადით და  $\alpha = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}$  მუდმივით.

2.54. ერთგანზომილებიანი ოსცილატორი იმყოფება  $n$ -ე დონეზე. იპოვეთ მისთვის  $\langle x^2 \rangle$  და საშუალო პოტენციური ენერჯია.

2.55. ჰარმონიული ოსცილატორის ენერჯიაა  $\frac{7}{2}\hbar\omega$ . გამოთვალეთ საშუალო კინეტიკური ენერჯია.

2.56. გამოსახეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ჰამილტონიანი  $\hat{a}^+$  გაჩენის და  $\hat{a}$  გაქრობის ოპერატორების საშუალებით. ეს ოპერატორები ასე განიმარტება:

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right); \hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right), \text{ სადაც } \xi = \frac{x}{x_0}; x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

2.57. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$\hat{a}^+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}; \hat{a}\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}$$

2.58.  $\hat{a}^+$  გაჩენის და  $\hat{a}$  გაქრობის ოპერატორების საშუალებით იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები ჰარმონიული ოსცილატორისათვის.

2.59.  $\hat{a}^+$  გაჩენის და  $\hat{a}$  გაქრობის ოპერატორების საშუალებით იპოვეთ ტალღური ფუნქციები ჰარმონიული ოსცილატორისათვის.

2.60. დაამტკიცეთ, რომ კოორდინატის ოპერატორისათვის ნულისგან განსხვავებულია მხოლოდ შემდეგი ინტეგრალები:

$$\langle \psi_{n+1} | x | \psi_n \rangle = x_0 \sqrt{\frac{n+1}{2}} ; \langle \psi_{n-1} | x | \psi_n \rangle = x_0 \sqrt{\frac{n}{2}}$$

2.61. აჩვენეთ, რომ კომუტატორი  $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$ .

2.62. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\psi$  ფუნქცია აღწერს მდგომარეობას  $E$  ენერგიით, ანუ  $\hat{H}\psi = E\psi$ , მაშინ  $a_+\psi$  აღწერს მდგომარეობას  $E + \hbar\omega$  ენერგიით, ანუ  $\hat{H}(a_+\psi) = (E + \hbar\omega)(a_+\psi)$ .

2.63. აჩვენეთ, რომ გაქრობის ოპერატორი  $\hat{a}$  სისტემის ენერგიას ქვევით სწევს  $\hbar\omega$  სიდიდით.

2.64.\* აჩვენეთ, რომ გაქრობის ოპერატორს არ შეუძლია შექმნას მდგომარეობა უსასრულო ნორმით, ანუ  $\int |\hat{a}\psi|^2 < \infty$ , თუ თავად  $\psi$  ნორმალიზებული მდგომარეობაა შრედინგერის განტოლების.

მითითება: გამოიყენეთ ნაწილობითი ინტეგრაცია და აჩვენეთ, რომ

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\hat{a}\psi)^* (\hat{a}\psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (\hat{a}_+ \hat{a}\psi) dx .$$

შემდეგ გამოიყენეთ შრედინგერის განტოლება ჩანერილი  $\hat{a}^+$  გაჩენის და  $\hat{a}$  გაქრობის ოპერატორების საშუალებით:

$$\left( \hat{a}_+ \hat{a} + \frac{1}{2} \hbar\omega \right) \psi = E\psi$$

იმისათვის, რომ მივიღოთ თანაფარდობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{a}\psi|^2 dx = E - \frac{1}{2} \hbar\omega ,$$

სადაც  $E$  არის  $\psi$  მდგომარეობის ენერგია.

2.65. ა) ერმიტის პოლინომი განიმარტება შემდეგნაირად:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \left( \frac{d}{d\xi} \right)^n e^{-\xi^2}$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა  $H_3$  და  $H_4$ -ის დასათვლელად.

ბ) ერმიტის პოლინომები აკმაყოფილებენ რეკურენტულ თანაფარდობას:

$$H_{n+1}(\xi) = 2\xi H_n(\xi) - 2nH_{n-1}(\xi).$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა და ა) კითხვაზე პასუხი  $H_5$  და  $H_6$ -ის დასათვლელად.

2.66. ა) ერმიტის პოლინომებისათვის ადგილი აქვს განარმოების ფორმულას:

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi).$$

გამოიყენეთ ეს ფორმულა  $H_5$  და  $H_6$ -ის გასანარმოებლად.

ბ) ცნობილია, რომ ერმიტის პოლინომი  $H_n(\xi)$  არის  $e^{-z^2+2z\xi}$  მანარმოებელი ფუნქციის ნებისმიერი  $n$  რიგის წარმოებული  $z=0$  წერტილში. გამოიყენეთ ეს ფაქტი და იპოვეთ  $H_0$ ,  $H_1$  და  $H_2$ -ის დასათვლელად.

2.67.\* ორ ნაწილაკს, რომლებიც ერთმანეთთან დრეკადი  $F = k(x_1 - x_2)$  ძალით არიან დაკავშირებული, შეუძლიათ თავისუფლად გადაადგილება  $OX$  ღერძის გასწვრივ. იპოვეთ ტალღური ფუნქცია და ენერჯის სპექტრი.

**მითითება:** შემოიტანეთ სიმძიმის ცენტრის კოორდინატი  $X_c$  და ფარდობითი  $x = x_1 - x_2$  კოორდინატი და განაცალეთ ცვლადები.

2.68.\* გამოთვალეთ მატრიცული ელემენტები  $x$  და  $p$  ოპერატორებისა ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის:

$$x_{nk} = \langle n|x|k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) x \Phi_k(x) dx,$$

$$p_{nk} = \langle n|p|k \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^*(x) p \Phi_k(x) dx,$$

სადაც  $\Phi_n(x)$  ერთგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორის ტალღური ფუნქციებია.

**მითითება:** ჩანერეთ  $x$  და  $\hat{p}$  ოპერატორები  $\hat{a}^+$  გაჩენისა და  $\hat{a}$  გაქრობის ოპერატორების საშუალებით და გამოიყენეთ 2.57 ამოცანის შედეგები.

2.69.\* იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, ე.წ. მორსის პოტენციალისათვის

$$V(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}),$$

სადაც  $A$  და  $\alpha$  დადებითი მუდმივებია. გამოარკვიეთ როდის არ გვაქვს დონეები.

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ  $\xi = \frac{2\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} e^{-\alpha x}$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.70.\* იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს

$$V(x) = -\frac{U_0}{ch^2\alpha x}$$

ველში, სადაც  $U_0 > 0$ .

**მიითითება:** გააკეთეთ  $\xi = th\alpha x$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.71.\* იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2 \alpha x}; V_0 > 0, \alpha > 0$$

პაშენ-ტალერის ველში.

**მიითითება:** ჩანერეთ  $V_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \lambda(\lambda-1)$ ,  $\lambda > 1$ , შეცვალეთ დამოუკიდებელი

ცვლადი  $y = \sin^2 \alpha x$ , გააკეთეთ  $\psi = (1-y)^{\frac{\lambda}{2}} f(y)$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.72.\*  $0 < x < \frac{\pi}{2\alpha}$  ინტერვალში იპოვეთ ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს

$$V(x) = \frac{V_1}{\sin^2 \alpha x} + \frac{V_2}{\cos^2 \alpha x};$$

განზოგადებული პაშენ-ტალერის ველში ( $V_1$  და  $V_2$  დადებითი მუდმივებია).

**მიითთება:** ჩანერეთ  $V_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \eta(\eta - 1)$ ;  $V_2 = \frac{\hbar^2}{2m} \alpha^2 \lambda(\lambda - 1)$ ;  $\eta, \lambda > 1$ , შეცვა-

ლეთ დამოუკიდებელი ცვლადი  $y = \sin^2 \alpha x$ , გააკეთეთ  $\psi = y^{\frac{\eta}{2}} (1 - y)^{\frac{\lambda}{2}} f(y)$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.73.\* იპოვეთ ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა შემდეგი პოტენციალისათვის:

$$U(x) = \frac{U_1}{\left(1 + e^{\frac{x}{a}}\right)^2} - \frac{U_2}{\left(1 + e^{\frac{x}{a}}\right)}; U_{1,2} > 0; a > 0$$

**მიითთება:** შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი  $z = -e^{x/a}$ , გააკეთეთ  $\psi = z^\mu (1 - z)^{-\epsilon} f(z)$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.74.\* იპოვეთ ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისა, რომელიც  $U = -Fx$ ;  $F > 0$  ერთგვაროვან ველში მოძრაობს.

**მიითთება:** გააკეთეთ  $\xi = \left(x + \frac{E}{F}\right) \left(\frac{2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ეირის ფუნქციის განტოლებაზე.

2.75. იპოვეთ ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკის ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში.

2.76.\* ნაწილაკი მოძრაობს ველში:

$$U(z) = \begin{cases} mgz, & z > 0 \\ \infty, & z < 0 \end{cases}$$

იპოვეთ ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები.

**მიითთება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ  $x = \left(z - \frac{E}{mg}\right) \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{1/3}$  ჩას-

მა და განტოლება დაიყვანეთ ეირის ფუნქციის განტოლებაზე.

2.77.\* იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერჯიის დონეები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს

$$V(x) = V_0 \left(\frac{a}{x} - \frac{x}{a}\right)^2; x > 0$$

ველში.



**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი  $\xi = \frac{\sqrt{2mV_0}}{\hbar a} x^2$ , გააკეთეთ  $\psi = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^{\nu} u(\xi)$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ გადგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.78.\* იპოვეთ ტალღური ფუნქციები და ენერჯის დონეები ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ველში:

$$V(x) = V_0 \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{a} x; \quad 0 < x < a.$$

ჩაატარეთ ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციის ნორმირება. განიხილეთ ზღვრული შემთხვევები დიდი და მცირე  $V_0$ -სათვის.

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ  $\psi = \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right)^{-2\lambda}$   $u$  ჩასმა, სა-

დაც  $\lambda = \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{8mV_0 a^2}{\pi^2 \hbar^2} + 1} - 1 \right)$ ,  $\nu = \sqrt{\frac{ma^2}{2\hbar^2 \pi^2} (E + V_0)}$ . შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი  $z = \cos^2 \frac{\pi x}{a}$  და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე.

2.79.\* სისტემა შედგება ორი ერთნაირი  $M$  მასის ნაწილაკისაგან. ეს ნაწილაკები ასრულებენ ერთგანზომილებიან მოძრაობას და ურთიერთქმედებენ ერთმანეთთან  $F = -k(x_1 - x_2)$  ძალით, სადაც  $x_1$  და  $x_2$  ნაწილაკების კოორდინატებია. სისტემა აღინერება ტალღური ფუნქციით:

$$\psi = \exp \left[ i \frac{P(x_1 + x_2)}{2\hbar} \right] \exp \left[ -\frac{\sqrt{Mk/2}(x_1 - x_2)^2}{2\hbar} \right].$$

- რას უდრის ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობის სრული ენერჯის საშუალო?
- განსაზღვრეთ ნაწილაკების ფარდობითი მოძრაობის იმპულსის მოდულის საშუალო.

**მიითითება:** ა) შემოიღეთ ცვლადები  $x = x_1 - x_2$ ,  $R = x_1 + x_2$ , დაყვანილი მასა

$$\mu = \frac{M}{2} \text{ და ჩანერეთ } \psi = \psi_x \psi_R; \text{ ბ) შეცვალეთ ცვლადი } y^2 = \frac{\sqrt{\mu k} x^2}{\hbar}.$$

## 2.2. უწყვეტი სპექტრის მდგომარეობები. პოტენციურ ბარიერებში ნაწილაკის გასვლა

2.80.  $m$  მასის და  $E$  ენერგიის ნაწილაკთა სტაციონარული ნაკადი ეცემა აბსოლუტურად შეუღწევად კედელს:

$$U(x) = \begin{cases} \infty; & x \leq 0 \\ 0; & x > 0 \end{cases}$$

განსაზღვრეთ ნაწილაკის ადგილმდებარეობის პოვნის ალბათობის სიმკვრივის განაწილება  $W(x)$ . იპოვეთ იმ წერტილების კოორდინატები, სადაც  $W(x)$ -ს აქვს მაქსიმალური მნიშვნელობა.

2.81.  $m$  მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა  $U_0$  სიმაღლის სწორკუთხა პოტენციურ ბარიერს, რომლის პოტენციალია:

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ U_0 > 0; & x \geq 0 \end{cases}$$

ნაწილაკის ენერგიაა  $E$ , ამასთან,  $E < U_0$ . იპოვეთ ნაწილაკის ბარიერს ქვემოთ ეფექტურად შეღწევადობის სიღრმე  $x_{eff}$ , ანუ მანძილი ბარიერის საზღვრიდან იმ წერტილამდე, სადაც ნაწილაკის პოვნის ალბათობის სიმკვრივე  $e$ -ჯერ მცირდება. იპოვეთ  $x_{eff}$  ელექტრონისთვის, თუ  $U_0 - E = 1$  ევ.

2.82. გამოიყენეთ წინა 2.81 ამოცანის პირობები და:

- აჩვენეთ, რომ  $E < U_0$ -თვის ბარიერიდან არეკვლის კოეფიციენტი  $R$  ერთის ტოლია;
- განსაზღვრეთ ნაწილაკის ადგილმდებარეობის პოვნის ალბათობის სიმკვრივის განაწილება  $W(x)$  იმ შემთხვევაში, როცა  $E = \frac{U_0}{2}$ .

2.83.  $m$  მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა  $U_0$  სიმაღლის სწორკუთხა პოტენციურ ბარიერს, რომლის პოტენციალია:

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ U_0 > 0; & x \geq 0 \end{cases}$$

ნაწილაკის ენერგიაა  $E$ , ამასთან,  $E > U_0$ . იპოვეთ ბარიერის  $R$  არეკვლის და  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტები.

2.84. აჩვენეთ, რომ  $R$  არეკვლის და  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$R + D = 1.$$

2.85. დაამტკიცეთ, რომ  $R$  არეკვლის და  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტები მოცემული ენერგიისთვის არ არის დამოკიდებული იმაზე, მარცხნიდან თუ მარჯვნიდან ეცემა ნაწილაკები პოტენციურ ბარიერს.

2.86.  $m$  მასის ნაწილაკი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ პოტენციურ ველში

$$U(x) = \begin{cases} U_0 < 0; & x > 0 \\ 0; & x \leq 0 \end{cases}.$$

ნაწილაკის ენერგია  $x = 0$ . ნერტილის მარცხნივ არის  $E$ . იპოვეთ  $R$  არეკვლის კოეფიციენტი შემდეგ შემთხვევებში:

ა)  $E \ll U_0$ ;   ბ)  $E \gg U_0$

2.87.  $m$  მასის ნაწილაკი მოძრაობს მარცხნიდან მარჯვნივ პოტენციურ ველში:

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ -U_0; & 0 \leq x \leq l. \\ 0; & x > l \end{cases}$$

ორმოს გარეთ ნაწილაკის ენერგიაა  $E \geq U_0$ . იპოვეთ:

ა) გაჟონვის კოეფიციენტი  $D$ ,

ბ)  $D$ -ს მნიშვნელობა ელექტრონისთვის, როცა  $E = U_0 = 1$  ევ, თუ  $l = 0,1$  ნმ.

2.88. ისარგებლეთ წინა 2.87 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ  $E$  ენერგიის მნიშვნელობანი, რომლის დროსაც ნაწილაკი დაუბრკოლებლივ გაივლის ორმოს. დარწმუნდით, რომ ეს მაშინ ხდება, როდესაც  $l$  ორმოს სიგრძე ორმოს შიგნით ნაწილაკის დებროილის ტალღის ნახევარსიგრძის ჯერადია. დათვალეთ მინიმალური ენერგია  $E_{\min}$  ელექტრონისათვის, როცა  $U_0 = 10$  ევ და  $l = 0,25$  ნმ.

2.89. ისარგებლეთ 2.88 ამოცანის პირობებით და ჩათვალეთ, რომ ცნობილია  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტი,  $E$  და  $U_0$ . იპოვეთ ორმოს სიგრძე  $l$ , რომლის დროსაც  $R$  არეკვლის კოეფიციენტი მაქსიმალურია.

2.90.  $m$  მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა სწორკუთხა პოტენციურ ბარიერს

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ U_0 > 0; & 0 \leq x \leq l. \\ 0; & x > l \end{cases}$$

ამასთან,  $E > U_0$ . იპოვეთ:

- ა) ბარიერის  $D$  გაჭონვის კოეფიციენტი მოცემულ შემთხვევაში და  $D$ -ს გამოსახულება  $E \rightarrow U_0$  ზღვარში.
- ბ)  $E$  ენერგიის პირველი ორი მნიშვნელობა, რომლის დროსაც ელექტრონი დაუბრკოლებლად გადის ასეთ ბარიერში, თუ  $U_0 = 10$  ევ და  $l = 0,5$  ნმ.

2.91.  $m$  მასის ნაწილაკი მარცხნიდან ეცემა სწორკუთხა პოტენციურ ბარიერს

$$U(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ U_0 > 0; & 0 \leq x \leq l. \\ 0; & x > l \end{cases}$$

ამასთან,  $E < U_0$ . იპოვეთ:

- ა) ბარიერის  $D$  გაჭონვის კოეფიციენტი.
- ბ) გაამარტივეთ მიღებული გამოსახულება  $D \ll 1$  შემთხვევაში.
- გ) იპოვეთ ელექტრონის და პროტონის ბარიერში გავლის ალბათობა  $E = 5$  ევ ენერგიით, თუ  $U_0 = 10$  ევ და  $l = 0,1$  ნმ.

2.92. გამოიყენეთ წინა 2.92 ამოცანის პირობები; ჩათვალეთ, რომ ნაწილაკები ბარიერს ეცემა მარცხნიდან და იპოვეთ  $\frac{W(0)}{W(l)}$ -ალბათობათა სიმკვრივის შეფარდე-

ბა  $x = 0$  და  $x = l$  წერტილებში  $E = \frac{U_0}{2}$  შემთხვევისათვის.

2.93.\* იპოვეთ  $R$  არეკვლის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციურ ველში:

$$U(x) = \frac{U_0}{1 + e^{-\alpha x}}.$$

ამასთან,  $E > U_0$ . განიხილეთ ზღვრული შემთხვევები, როცა  $E = U_0$ ,  $E \rightarrow \infty$  და კლასიკური ზღვარი  $\hbar \rightarrow 0$ . ფიზიკურად ახსენით მიღებული შედეგები.

**მითითება:** შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი

$$\xi = -e^{-\alpha x}, \text{ გააკეთეთ } \psi = \xi^{-ik_2/\alpha} w(\xi) \left( k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)} \right)$$
 ჩასმა და განტო-

ლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე. მიღებულ ამონახსნში განიხილეთ ზღვარი  $\xi \rightarrow -\infty$ .

2.94.\* იპოვეთ  $R$  არეკვლის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციურ ველში:

$$U(x) = -\frac{U_0}{e^{\frac{x}{a}} + 1}.$$

ამასთან,  $E > 0$ .

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი  $\xi = -e^{-\frac{x}{a}}$ , გააკეთეთ  $\psi = \xi^{-ika} u(\xi)$  ( $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ) ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებაზე. მიღებულ ამონახსნში განხილეთ ზღვარი  $\xi \rightarrow -\infty$ .

2.95.\* იპოვეთ  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტი ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ პოტენციურ ველში:

$$U(x) = \frac{U_0}{ch^2 \alpha x}; U_0 > 0.$$

ამასთან,  $E < U_0$ .

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლება ამ ამოცანისათვის მიიღება 2.70 ამოცანაში განხილული შემთხვევიდან  $U_0$ -ის ნიშნის შეცვლით, ამასთანავე, ახლა  $E$  ენერგია დადებითია. ამიტომ შეიძლება გამოვიყენოთ 2.70 ამოცანაში განხილული ამოხსნის მეთოდი.

2.96.\* დაადგინეთ  $D$  გაჟონვის კოეფიციენტის ნულისკენ მისწრაფების კანონი, როდესაც  $E \rightarrow 0$  იმ პირობებში, როცა  $U(x)$  პოტენციური ენერგია სწრაფად ეცემა  $|x| \gg a$  მანძილებზე, სადაც  $a$  ურთიერთქმედების არის მახასიათებელი ზომაა.

**მიითითება:**  $|x| \gg a$  მანძილებზე  $E \rightarrow 0$  პირობებში, შრედინგერის განტოლებაში უგულვებელყავით ენერგია და პოტენციური ენერგია და ამოხსენით მიღებული განტოლება.

2.97.\* განსაზღვრეთ არეკვლის და გაჟონვის კოეფიციენტები დირაკის დელტა პოტენციალისათვის  $U(x) = \alpha \delta(x)$ .

**მიითითება:** ამოხსენით შრედინგერის განტოლება დადებითი ენერგიებისათვის  $x < 0$  და  $x > 0$  არეებში და „შეკერეთ“ მიღებული ამოხსნები  $x = 0$  წერტილში.

2.98.\* იპოვეთ ენერგია, რომლის დროსაც ნაწილაკი არ აირეკლება  $U = a[\delta(x) + \delta(x - a)]$  პოტენციური ბარიერიდან.

**მიითითება:**  $x = 0$  და  $x = a$  ნერტილებში ამოხსნების შეკერვისას გამოიყენეთ 2.43 ამოცანის შედეგები.

### 2.3. თავისუფლების რამდენიმე ხარისხის მქონე სისტემები

2.99.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში ( $U = 0$ , როცა  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$  და  $U = \infty$  ამ არის გარეთ). იპოვეთ ენერჯის სპექტრი და ნაწილაკის  $\psi$  ნორმირებული ფუნქცია.

2.100. ამოცანაში 2.99 იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობა უმცირესი ენერჯით  $0 < x < a/3$ ,  $0 < y < b/3$  არეში.

2.101.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში. ორმოს გვერდია  $l$ . იპოვეთ პირველი ოთხი დონის ენერჯია.

2.102. 2.101. ამოცანაში იპოვეთ ნაწილაკის მდგომარეობების რიცხვი ენერჯის ( $E, E + dE$ ) ინტერვალში, თუ ენერჯის დონეები განლაგებულია ძალზე მჭიდროდ.

2.103.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში უსასრულო სიმაღლის კვადრატულ ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში. იპოვეთ ნაწილაკის  $E$  ენერჯია, თუ ნაწილაკის პოვნის მაქსიმალური ალბათობა არის  $P_m$ .

2.104. ამოხსენით კეპლერის ამოცანა ორგანზომილებიან შემთხვევაში, ანუ იპოვეთ ნაწილაკის ენერჯის მნიშვნელობები და ტალღური ფუნქცია პოტენციურ ველში  $V = -\frac{Ze^2}{\rho}$ , სადაც  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  ( $z$  კოორდინატზე ფუნქცია არ არის დამოკიდებული).

2.105. იპოვეთ ბრტყელი იზოტროპული ოსცილატორის ენერგეტიკული დონეები და ტალღური ფუნქციები.

2.106.\* იპოვეთ

$$U = k \frac{x^2 + y^2}{2} + \alpha xy; |\alpha| < k$$

პოტენციურ ველში მოძრავი ნაწილაკის ენერგეტიკული დონეები.

**მიითითება:** პოტენციალი გადანერეთ შემდეგი სახით:

$$U = k_1(x + y)^2 / 4 + k_2(x - y)^2 / 4,$$

სადაც  $k_{1,2} = k \pm \alpha > 0$  და შემოიღეთ ახალი ცვლადები:  $x_1 = (x + y)\sqrt{2}$  და  $y_1 = (y - x)\sqrt{2}$

2.107.\* იპოვეთ ენერგეტიკული სპექტრი შემდეგი ჰამილტონიანისა:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M} \hat{p}_1^2 + \frac{1}{2m} \hat{p}_2^2 + \frac{1}{2}k(x_1^2 + x_2^2) + \alpha x_1 x_2; |\alpha| < k.$$

**მითითება:** შემოიღეთ აღნიშვნა:  $y_1 = \frac{x}{\gamma}$  და  $y_2 = x_2$ , სადაც  $\gamma = \sqrt{\frac{m}{M}}$  და მიიყვანეთ ჰამილტონიანი დიაგონალურ სახეზე.

2.108. იპოვეთ ენერგეტიკული დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები ნაწილაკის სტაციონარული მდგომარეობებისა უსასრულოდ სიმაღლის სამგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში ( $U = 0$ , როცა  $0 < x < a$ ,  $0 < y < b$ ,  $0 < z < c$  და  $U = \infty$  ამ არის გარეთ).

2.109.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება  $l$  წიბოს მქონე კუბის ფორმის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში. ისარგებლეთ წინა 2.109 ამოცანის შედეგებით და იპოვეთ მე-3 და მე-4 დონეების ენერგიების სხვაობა.

2.110. ისარგებლეთ 2.108 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ ნაწილაკის მდგომარეობების რიცხვი ენერგიის  $(E, E + dE)$  ინტერვალში, თუ ენერგიის დონეები განლაგებულია ძალზე მჭიდროდ.

2.111.\* დრეკადი ძალით დაკავშირებული ორი  $m$  მასის ნაწილაკი მოძრაობს  $OX$  ღერძის გასწვრივ. ამასთანავე, თითოეული ნაწილაკი  $x = 0$  წერტილთან სხვა დრეკადობის კოეფიციენტის მქონე იმავე ტიპის ძალით არის დაკავშირებული. განსაზღვრეთ სისტემის ენერგიის დონეები და ტალღური ფუნქცია.

მითითება: შემოიღეთ მასათა ცენტრის  $X_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$  კოორდინატი, ფარდობითი

$x = x_1 - x_2$  კოორდინატი და განაცალეთ ცვლადები.

### თავი 3. იმპულსის მომენტი

#### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

იმპულსის მომენტის  $\hat{L} = [\hat{r} \times \hat{p}]$  ოპერატორის  $\hat{L}_i$  მდგენელები სფერულ კოორდინატებში მხოლოდ  $\theta$  და  $\varphi$  კუთხეებზეა დამოკიდებული. მაგალითად:

$$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.1)$$

რომლის საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობებია: ( $\hbar m \equiv L_z$ );

$$\Phi_m(\varphi) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.2)$$

$\hat{L}^2$  იმპულსის მომენტის კვადრატის ოპერატორი გამოისახება ლაპლასის ოპერატორის კუთხური ნაწილით; მისი საკუთარი მნიშვნელობებია  $l(l+1)$ . ამასთან,  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$  ნაწილაკის ტალღური ფუნქციის მხოლოდ კუთხური ნაწილის განხილვისას  $\hat{L}^2$  და  $\hat{L}_z$  ოპერატორების საკუთარი ფუნქციები ადგენენ სრულ სისტემას, რომელთა ნორმირებული საკუთარი ფუნქციებია  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  სფერული ფუნქციები:

$$\hat{L}^2 Y_{lm} \equiv - \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm}, \quad (3.3)$$

$$\hat{L}_z Y_{lm} \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{lm} = m\hbar Y_{lm} \quad (3.4)$$

მათ შემდეგი სახე აქვთ:

$$Y_{lm} = (-1)^{\frac{m+|m|}{2}} i^{|m|} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-|m|)!}{4\pi(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (3.5)$$

$$P_l^{|m|}(\cos \theta) = \sin^{|m|} \theta \frac{d^{|m|}}{d(\cos \theta)^{|m|}} P_l(\cos \theta), \quad (3.6)$$

სადაც  $P_l$  და  $P_l^{|m|}$ , შესაბამისად, ლეჟანდრის და ლეჟანდრის მაკავშირებული პოლინომებია. ამასთან:



$$Y_m^\bullet = (-1)^{l-m} Y_{l,-m}; \int Y_{lm}^\bullet Y_{l'm'}^\bullet d\Omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.7)$$

სფერულ ფუნქციებს გააჩნიათ  $I = (-1)^l$  ლუნობა. მათთვის სამართლიანია „შეკრების თეორემა“:

$$\frac{2l+1}{4\pi} P_l(\vec{n}\vec{n}') = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\vec{n}) Y_{lm}^\bullet(\vec{n}'), \quad (3.8)$$

სადაც  $\vec{n}$  და  $\vec{n}'$  სათანადო მიმართულებების ორტეზია. ამასთან:

$$Y_{lm}(\vec{n}) \equiv Y_{lm}(\theta, \varphi): \vec{n}\vec{n}' = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\varphi - \varphi') \quad (3.9)$$

სფერულ ფუნქციებს დაბალი ორბიტალური მომენტებისათვის შემდეგი სახე აქვთ:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}; Y_{10} = i\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta; Y_{1,\pm 1} = \mp i\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi} \quad (3.10)$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (1 - 3\cos^2\theta); Y_{2,\pm 1} = \pm\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin\theta \cos\theta e^{\pm i\varphi};$$

$$Y_{2,\pm 2} = -\sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2\theta e^{\pm 2i\varphi}.$$

3.1. იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები და ნორმირებული საკუთარი ფუნქციები შემდეგი ოპერატორებისა: ა)  $\hat{L}_z$ ; ბ)  $\hat{L}_z^2$

3.2. დაამტკიცეთ, რომ  $\hat{L}_z$  ოპერატორი ერმიტული ოპერატორია. დაამტკიცება ჩავატაროთ პოლარულ და დეკარტეს კოორდინატებში.

3.3. დაამტკიცეთ  $\hat{L}^2$  ოპერატორის ერმიტულობა იმის გათვალისწინებით, რომ  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$  და  $\hat{L}_z$  ერმიტული ოპერატორებია.

3.4. დაამტკიცეთ, რომ:

$$[\hat{L}_i, r_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} r_k,$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო  $\varepsilon_{ijk}$  სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.5. დაამტკიცეთ, რომ:

$$[\hat{L}_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k,$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო  $\varepsilon_{ijk}$  სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.6. დაამტკიცეთ, რომ:

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} \hat{L}_k,$$

სადაც [ ] აღნიშნავს კომუტატორს, ხოლო  $\epsilon_{ijk}$  სრულიად ანტისიმეტრიული მესამე რანგის ტენზორია.

3.7. აჩვენეთ, რომ  $L^2$  კომუტირებს თითოეულ  $L_i$ -თან.

3.8. დაამტკიცეთ, რომ:

$$\hat{L} \times \hat{L} = i\hbar \hat{L}$$

3.9. დაამტკიცეთ, რომ  $\hat{L}_z$  ოპერატორი კომუტირებს კინეტიკური ენერგიის  $\hat{K}$  ოპერატორთან.

3.10. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორი:

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-],$$

სადაც  $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

3.11. გამოთვალეთ შემდეგი კომუტატორი:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm],$$

სადაც  $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$

3.12. აჩვენეთ, რომ:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0$$

3.13. აჩვენეთ, რომ:

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_+ \hat{L}_- + \hat{L}_z^2 - \hbar \hat{L}_z = \hat{L}_- \hat{L}_+ + \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z$$

3.14. იპოვეთ შემდეგი კომუტატორები:

ა)  $[\hat{l}_i, \hat{r}^2]$ ,  $[\hat{l}_i, \hat{p}^2]$ ,  $[\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})]$ ,  $[\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})^2]$ ; ბ)  $[\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})\hat{p}_k]$ ,  $[\hat{l}_i, (\hat{p}\hat{r})\hat{x}_k]$ ,  $[\hat{l}_i, (a\hat{x}_k + b\hat{p}_k)]$ ;

გ)  $[\hat{l}_i, \hat{x}_k \hat{x}_l]$ ,  $[\hat{l}_i, \hat{p}_k \hat{p}_l]$ ,  $[\hat{l}_i, \hat{x}_k \hat{p}_l]$ , სადაც  $a$  და  $b$  მუდმივებია.

3.15. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$[\hat{L}^2, z] = 2i\hbar(x\hat{L}_y - y\hat{L}_x - i\hbar z)$$

3.16. აჩვენეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$[\hat{L}^2, [\hat{L}^2, z]] = 2\hbar^2(z\hat{L}^2 + \hat{L}^2 z).$$

**მიითითება:** ისარგებლეთ წინა 3.15 ამოცანის შედეგით და იმ ფაქტით, რომ სკალარული ნამრავლი  $\vec{r}\hat{L} = 0$ .

3.17. დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$[\hat{L}_i, \hat{A}_k] = i\hbar \epsilon_{ikl} \hat{A}_l,$$

სადაც  $\hat{A}_k$  არის ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი ვექტორული ოპერატორის  $k$  მდგენელი.

3.18. წინა 3.17 ამოცანის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$[\hat{L}_x^2, \hat{A}_x] = 0; \quad [\hat{L}_y^2, \hat{A}_x] = -2i\hat{L}_y \hat{A}_z - \hat{A}_x; \quad [\hat{L}_z^2, \hat{A}_x] = 2i\hat{L}_z \hat{A}_y - \hat{A}_x$$

3.19. 3.16 ამოცანის გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა:

$$[\hat{L}^2, \hat{A}_x] = 2i(\hat{L}_z \hat{A}_y - \hat{L}_y \hat{A}_z) - 2\hat{A}_x$$

3.20. იპოვეთ ნორმირებული  $\Psi_{r_0,lm}$  ტალღური ფუნქციები, რომლებიც აღწერენ სათავიდან  $r_0$  მანძილზე მყოფი ნაწილაკის მდგომარეობას (ნაწილაკს გააჩნია  $l$  ორბიტალური მომენტის და მისი  $z$  ღერძზე  $m$  პროექცია).

3.21. იპოვეთ ნაწილაკის  $z$  ღერძზე იმპულსის ოპერატორის პროექციის და იმპულსის მომენტის საერთო საკუთარი ფუნქციები.

3.22.\* ბრტყელი როტატორი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღინერება  $\psi(\varphi) = A \sin \varphi$  ტალღური ფუნქციით. შეიძლება თუ არა იმპულსის მომენტის გაზომვისას მივიღოთ  $l_z = 2\hbar$  მნიშვნელობა?

**მიითითება:** გაშალეთ  $\psi(\varphi) = A \sin \varphi$  ფუნქცია  $\hat{L}_z$  ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად და იპოვეთ  $m$  მაგნიტური კვანტური რიცხვის შესაძლო მნიშვნელობები.

3.23. როტატორი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღინერება  $\psi(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3\pi}} \sin^2 \varphi$

ტალღური ფუნქციით. დათვალეთ  $\langle l_z^2 \rangle$  საშუალო ორი მეთოდით: ალბათობებით და ოპერატორის საშუალებით.

3.24.\* აჩვენეთ, რომ  $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$  ოპერატორებით  $\Psi_m$  საკუთარ ფუნქციაზე ( $\hat{L}_z \Psi_m = m\Psi_m$ ) მოქმედების შედეგად მიღებული ფუნქცია კვლავ  $\hat{L}_z$  ოპერატორის

საკუთარი ფუნქციაა, რომლებიც შეესაბამება  $m + 1$  და  $m - 1$  საკუთარ მნიშვნელობებს, შესაბამისად,  $\hat{I}_+$  და  $\hat{I}_-$  ოპერატორებისათვის.

**მითითება:** გამოიყენეთ 3.11 ამოცანის შედეგი.

3.25. 3.24 ამოცანაში განხილული  $\hat{I}_\pm = \hat{I}_x \pm i\hat{I}_y$  ამწევი და დამწევი ოპერატორებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები:

$$\hat{I}_\pm \psi_l^m = A_l^m \psi_l^{m\pm 1},$$

სადაც  $A_l^m$  მუდმივებია. იპოვეთ ეს მუდმივები, თუ ტალღური ფუნქციები ნორმირებულია.

**მითითება:** გამოიყენეთ 3.13 ამოცანის შედეგი.

3.26. აჩვენეთ, რომ  $\Psi_m$  მდგომარეობაში ( $\hat{I}_z \Psi_m = m \Psi_m$ ) საშუალოებისათვის სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

ა)  $\langle \hat{I}_x \rangle = \langle \hat{I}_y \rangle = 0$ ; ბ)  $\langle \hat{I}_x \hat{I}_y \rangle = -\langle \hat{I}_y \hat{I}_x \rangle = im/2$ ; გ)  $\langle \hat{I}_x^2 \rangle = \langle \hat{I}_y^2 \rangle$

3.27.  $\Psi_{lm}$  მდგომარეობაში, როდესაც განსაზღვრული მნიშვნელობები აქვთ  $l$  იმპულსის მომენტს და მის  $m$  პროექციას  $z$  ღერძზე, იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობები  $\langle \hat{I}_x^2 \rangle$  და  $\langle \hat{I}_y^2 \rangle$ .

3.28. იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობები  $\langle \hat{I}_z^2 \rangle$  სისტემისათვის, რომელიც იმყოფება  $\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$  მდგომარეობაში.

3.29. იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობები  $\langle (\Delta\varphi)^2 \rangle$  და  $\langle (\Delta L_z)^2 \rangle$  სისტემისათვის, რომელიც იმყოფება  $\psi(\varphi) = A \sin \varphi$  მდგომარეობაში.

3.30. აჩვენეთ, რომ  $\psi$  მდგომარეობაში, რომელშიც  $\hat{I}_z$  ოპერატორს გააჩნია განსაზღვრული საკუთარი მნიშვნელობა, საშუალოებისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობები  $\langle \hat{I}_x \rangle = \langle \hat{I}_y \rangle = 0$ .

3.31. გამოთვალეთ იმპულსის მომენტის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა  $\psi(\theta, \varphi) = A \sin \theta \cos \varphi$  მდგომარეობაში.

3.32. ნებისმიერ ღერძზე იმპულსის მომენტის შესაძლო მნიშვნელობებია  $m\hbar$ , სადაც  $m = l, l-1, \dots, -l$ . გაითვალისწინეთ, რომ ეს მნიშვნელობები თანაბრად ალბათურია და ღერძები თანასწორუფლებიანია. აჩვენეთ, რომ მდგომარეობაში მო-

ცემული  $l$ -ით, იმპულსის მომენტის კვადრატის საშუალო მნიშვნელობა ტოლია  $\langle L^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1)$ .

3.33.\* აჩვენეთ, რომ, თუ  $\psi$  არის  $\hat{L}^2$  და  $\hat{L}_z$  ოპერატორების საკუთარი ფუნქცია, მაშინ  $\hat{L}^2$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობის კვადრატი მეტია ან უდრის  $\hat{L}_z$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობის კვადრატს.

**მითითება:** დათვალეთ  $\hat{L}^2$  ოპერატორის საშუალო

3.34.  $\psi_{lm}$  საკუთარი ფუნქციაა  $\hat{L}^2$  და  $\hat{L}_z$  ოპერატორების  $\hbar^2 l(l+1)$  და  $\hbar m$  საკუთარი მნიშვნელობებით. აჩვენეთ, რომ  $\phi = (L_x + iL_y)\psi_{lm}$  ფუნქციაც საკუთარი ფუნქციაა  $\hat{L}^2$  და  $\hat{L}_z$  ოპერატორების და იპოვეთ  $\phi$  ფუნქციების საკუთარი მნიშვნელობები.

3.35.\* აჩვენეთ, რომ  $l = 0$  მნიშვნელობისათვის წინა 3.34 ამოცანაში განხილული  $\phi$  ფუნქცია საკუთარი ფუნქციაა  $\hat{L}_x$  და  $\hat{L}_y$  ოპერატორების.

**მითითება:**  $\hat{L}^2$  ოპერატორით იმოქმედეთ  $\hat{L}_x \psi_{00} = \sum_{l,m} A_{lm} \psi_{lm}$  ტოლობაზე და აჩვენეთ, რომ ყველა  $A_{lm} = 0$ , გარდა  $A_{00}$ -ისა.

## თავი 4. მოძრაობა სენტრალური სიმეტრიის ველში

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

ცენტრალური პოტენციალისათვის შრედინგერის სტაციონარული განტოლების

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(r) \right] \Psi_E(\vec{r}) = E \Psi_E(\vec{r}) \quad (4.1)$$

ამონახსნი,  $\hat{H}$ ,  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{L}_z$  ოპერატორების ურთიერთკომუტატურობის გათვალისწინებით, შემდეგი სახით შეიძლება ვეძებოთ:

$$\Psi_{n,l,m} = R_{n,l}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (4.2)$$

სადაც  $Y_{lm}$  სფერული ფუნქციაა. ამ თავში განხილულია მხოლოდ დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები და ენერგიები, აღინიშნება  $E_{n,l}$ -ით, სადაც  $n_r = 0, 1, 2, \dots$  რადიალური კვანტური რიცხვია. ამასთან,  $R_{n,l}(r)$  ფუნქციისათვის მიიღება შრედინგერის შემდეგი რადიალური განტოლება:

$$\frac{d^2 R_{n,l}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR_{n,l}}{dr} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - U(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_{n,l} = 0. \quad (4.3)$$

(4.3) განტოლების ამოსახსნელად ხშირად ხელსაყრელია გადავიდეთ ახალ საძიებელ ფუნქციაზე:

$$\chi_{n,l} = r R_{n,l}, \quad (4.4)$$

რომლისთვისაც განტოლება შემდეგ სახეს ღებულობს:

$$\frac{d^2 \chi_{n,l}}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left[ E - U(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \chi_{n,l} = 0 \quad (4.5)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობით:

$$\chi_{n,l}(0) = 0. \quad (4.6)$$

(4.5) ფორმალურად ემსგავსება შრედინგერის განტოლებას ერთგანზომილებიან შემთხვევაში.

ხშირად სარგებლობენ შემდეგი ჩასმითაც:

$$u_{n,l} = \sqrt{r} R_{n,l} \quad (4.7)$$

და  $u_{n,l}$  ფუნქციისათვის მიიღება შემდეგი განტოლება:

$$\frac{d^2 u_{n,l}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_{n,l}}{dr} - \left[ \frac{(l+1/2)^2}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (U(r) - E_{n,l}) \right] u_{n,l} = 0 \quad (4.8)$$

სასაზღვრო პირობით:

$$u_{n,l}(0) = 0 \quad (4.9)$$

#### 4.1 დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები

4.1  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციურ ორმოში, სადაც  $U(r) = 0$ , როცა  $r < r_0$  და  $U(r) = \infty$ , როცა  $r > r_0$ , სადაც  $r_0$  ორმოს რადიუსია. იპოვეთ ენერჯის მნიშვნელობები და ნორმირებული ტალღური ფუნქცია ნაწილაკისა  $l = 0$  მდგომარეობაში.

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლების ამოხსნისას ისარგებლეთ  $\psi = \chi/r$  ჩასმით.

4.2. წინა 4.1 ამოცანაში იპოვეთ ნაწილაკის პოვნის ალბათობის მაქსიმუმის წერტილი  $r_{\max}$  და ძირითად მდგომარეობაში მისი პოვნის  $W$  ალბათობა  $r < r_{\max}$  არეში.

4.3. ისარგებლეთ 4.1 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ საშუალო  $\langle r \rangle, \langle r^2 \rangle$  მნიშვნელობები და საშუალო კვადრატული გადახრები  $\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle$  ნაწილაკისთვის, რომელიც იმყოფება  $s(l = 0)$  დონეზე.

4.4.\* ისარგებლეთ 4.1 ამოცანის ამონახსნით და იპოვეთ  $\psi$  ტალღური ფუნქციის  $R_1(r)$  რადიალური ნაწილი, რომელიც აღწერს ნაწილაკის  $p$  მდგომარეობას ( $l = 1$ ).

**მიითითება:** გაანარმოეთ  $s(l = 0)$  მდგომარეობის  $R_0(r)$  აღმწერი შრედინგერის რადიალური განტოლება და მიღებული განტოლება შეადარეთ  $R_1(r)$ -ის განტოლებას.

4.5. იპოვეთ წინა 4.4 ამოცანის პირველი  $p$  დონის ენერჯია და შეადარეთ ის ძირითადი მდგომარეობის ენერჯიას.

4.6.  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციურ ორმოში, სადაც  $U(r) = 0$ , როცა  $r < r_0$  და  $U(r) = U_0$ , როცა  $r \geq r_0$ , სადაც  $r_0$  ორმოს რადიუსია. ა)  $E < U_0$  არეში  $s(l = 0)$  მდგომარეობისათვის მიიღეთ საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება; ბ) დარწმუნდით, რომ მოცემულ ორმოს ყოველთვის არ

გააჩნია დისკრეტული დონეები (ბმული მდგომარეობები). განსაზღვრეთ  $r_0^2 U_0$  სიდიდის მნიშვნელობების ინტერვალი, როდესაც ორმოს მხოლოდ ერთი დონე გააჩნია.

4.7. წინა 4.6 ამოცანაში ჩათვალეთ, რომ  $r_0^2 U_0 = \frac{8\pi^2 \hbar^2}{27m}$ . იპოვეთ ნაწილაკის

პოვნის ალბათობის მაქსიმუმის ნერტილი  $r_{\max}$ ,  $s(l=0)$  მდგომარეობაში და მისი პოვნის ალბათობა  $r > r_0$  არეში.

4.8. იპოვეთ  $s(l=0)$  მდგომარეობების დონეები შემდეგი პოტენციალისათვის:

$$U = -\alpha \delta(r - a)$$

4.9.\* იპოვეთ  $s(l=0)$  მდგომარეობების დონეები ექსპონენციალური პოტენციალისათვის:

$$U = -U_0 e^{-\frac{r}{a}}$$

**მითითება:** შრედინგერის განტოლება  $x = -\exp\left\{-\frac{r}{2a}\right\}$  ჩასმით მიიყვანეთ ბესელის განტოლებამდე.

4.10.\* იპოვეთ  $s(l=0)$  მდგომარეობების დონეები ჰულტენის პოტენციალისათვის:

$$U = -\frac{U_0}{e^{\frac{r}{a}} - 1}$$

**მითითება:** შრედინგერის განტოლებაში შეცვალეთ დამოუკიდებელი ცვლადი

$x = e^{-\frac{r}{a}}$ , გააკეთეთ  $\chi_{n,0} = x^\epsilon \left( \epsilon = \eta a; \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n,0}}{\hbar^2}} \right)$  ჩასმა და განტოლება

დაიყვანეთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის განტოლებამდე.

4.11.  $m$  მასის ნაწილაკის მდგომარეობა აღინერება შემდეგი არანორმირებული ტალღური ფუნქციით:

$$\psi_k = \frac{e^{-ikr} + e^{ikr}}{r}$$

ა) იპოვეთ ნაწილაკის ენერგია;

ბ) თავისუფალია თუ არა ნაწილაკი?

4.12.\*  $m$  მასის ნაწილაკი იმყოფება სფერულად სიმეტრიულ პოტენციურ ორმოში, სადაც  $U(r) = 0$ , როცა  $r < r_0$  და  $U(r) = \infty$ , როცა  $r > r_0$ , სადაც  $r_0$  ორმოს



რადიუსია. იპოვეთ ენერგიის მნიშვნელობები და ნორმირებული ტალღური ფუნქცია ნაწილაკისა ნებისმიერი  $l$ -თვის.

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ  $\Psi_{n,lm} = Y_{lm}(\theta, \varphi)\chi_{n,l}(r)/\sqrt{r}$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის ფუნქციების განტოლებაზე.

4.13.\* წინა 4.12 ამოცანის ძირითადი მდგომარეობისათვის იპოვეთ განაწილების ფუნქცია ნაწილაკის იმპულსების მიხედვით.

**მიითითება:** ძირითადი მდგომარეობის ნორმირებული ტალღური ფუნქცია

$$\Psi_0(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{\sin(\pi r/a)}{r}, \text{ ჩანერეთ იმპულსურ წარმოდგენაში.}$$

4.14.\* იპოვეთ ენერგიის დონეები შემდეგი პოტენციალისათვის:

$$U = -a\delta(r - a).$$

როგორია დისკრეტული დონეების პოვნის პირობა ნებისმიერი  $l$ -თვის?

**მიითითება:** შრედინგერის განტოლებაში გააკეთეთ  $\Psi_{n,lm} = Y_{lm}(\theta, \varphi)\chi_{n,l}(r)/\sqrt{r}$  ჩასმა და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის მოდიფიცირებული ფუნქციების განტოლებაზე.

4.15. ისარგებლეთ  $R(r) = \frac{\chi(r)}{r}$  ჩასმით და იპოვეთ ბმული მდგომარეობების

$R(r)$  რადიალური ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური სახე ელექტრონის ბირთვის კულონურ ველში მოძრაობისას: ა) დიდ და ბ) მცირე მანძილებზე.

4.16. წყალბადის ატომში ელექტრონი იმყოფება მდგომარეობაში, რომელიც აღინერება  $\psi = A(1 + ar)e^{\alpha r}$  ტალღური ფუნქციით, სადაც  $A, a$  და  $\alpha$  მუდმივებია. იპოვეთ:

ა) შრედინგერის განტოლების გამოყენებით  $a, \alpha$  მუდმივები;

ბ) ნორმირების  $A$  კოეფიციენტი.

4.17. წყალბადის ატომის ძირითად მდგომარეობაში იპოვეთ:

ა) საშუალო  $\langle r^n \rangle$ , სადაც  $n$  მთელი რიცხვია;

ბ) ელექტრონის საშუალო კინეტიკური და პოტენციური ენერგიები;

გ) ელექტრონის განაწილების ფუნქცია იმპულსების მიხედვით.

4.18. იპოვეთ წყალბადის ატომში ელექტრონის დენის სიმკვრივის კომპონენტები სფერულ კოორდინატებში.

4.19. ნაწილაკი თავისუფლად მოძრაობს  $Oyz$  სიბრტყეში  $0 \leq y \leq a$  და  $0 \leq z \leq b$  მართკუთხედის ფარგლებში. სიბრტყის დანარჩენი ნაწილი მიუწვდომელია ნაწი-

ლაკისათვის.  $OX$  ღერძის გასწვრივ მოძრაობისას კი მასზე მოქმედებს  $F = -kx$  ძალა. იპოვეთ ამ ნაწილაკის ენერჯიის დონეები და ნორმირების კოეფიციენტი.

4.20. ელექტრონისათვის წყალბადის ატომში ამოხსენით შრედინგერის განტოლება პარაბოლურ კოორდინატებში.

4.21. იპოვეთ წყალბადის ატომის ტალღური ფუნქცია და ენერჯიის სპექტრი ბირთვის მოძრაობის გათვალისწინებით.

4.22.\* იპოვეთ წყალბადის ატომის  $1s, 2s$  და  $2p$  ტალღური ფუნქციები იმპულსურ წარმოდგენაში.

**მითითება:** ისარგებლეთ შემდეგი კავშირით ტალღური ფუნქციების კოორდინატულ და იმპულსურ წარმოდგენებს შორის  $g_l(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} i^{-l} \int_0^\infty j_l(kr) \chi_l(r) dr$ , სადაც  $j_l(kr)$  ბესელის სფერული ფუნქციაა.

4.23.\* დაამტკიცეთ კულონის პოტენციალისათვის კრამერსის რეკურენტული ფორმულა  $\langle r^k \rangle$  საშუალოებისათვის

$$-\frac{k+1}{n^2} \langle r^k \rangle + (2k+1) \langle r^{k-1} \rangle + k \left[ \frac{k^2-1}{4} - l(l+1) \right] \langle r^{k-2} \rangle = 0.$$

**მითითება:** კულონის პოტენციალისათვის შრედინგერის რადიალური განტოლება გაამრავლეთ  $r^{k+1} R' - \frac{k+1}{2} r^k R$ -ზე და აინტეგრეთ  $r$ -ით.

4.24. წყალბადის ატომში ელექტრონის  $2s$  მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$\Psi_{200}(\rho) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} (2-\rho) e^{-\frac{\rho}{2}} \left( \frac{1}{a_0} \right)^{\frac{3}{2}},$$

სადაც  $\rho = \frac{r}{a_0}$ , ხოლო  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  ბორის პირველი რადიუსია. განსაზღვრეთ:

- მანძილი ბირთვიდან, რომელზედაც ელექტრონის პოვნის ალბათობას მაქსიმუმი გააჩნია;
- მანძილი ბირთვიდან, რომელზედაც ელექტრონის პოვნის ალბათობა ნულია.

4.25. აჩვენეთ, რომ, თუ წყალბადის ატომში სხვადასხვა  $m$ -ით (მაგნიტური ველის არარსებობისას) პოვნის ალბათობა ერთნაირია, მაშინ კუთხური განაწილება ალბათობის სიმკვრივისა სფერულად სიმეტრიულია  $p(l=1)$  მდგომარეობაში (ქვეგარსში).

4.26. წყალბადის ატომის ელექტრონის  $2p$  მდგომარეობაში გამოთვალეთ ელექ-

ტრონის პოენის ალბათობა  $a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$  ბორის პირველი რადიუსის შიგნით, როცა

$\theta$  კუთხე იცვლება  $0$ -დან  $\pi/2$ -მდე.

4.27. იპოვეთ ენერჯის დონეები სამგანზომილებიანი ანიზოტროპული ჰარმონიული ოსცილატორისათვის, რომლის პოტენციური ენერჯიაა:

$$V = \frac{k_1 x^2}{2} + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2}.$$

4.28. შრედინგერის განტოლებაში, დეკარტეს კოორდინატებში, ცვლადების განცალკევების მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ენერჯის დონეები და ნორმირებული

ტალღური ფუნქციები  $U(r) = \frac{kr^2}{2}$  სფერული ოსცილატორის. იპოვეთ დონეების გადაგვარების ჯერადობა.

4.29. სფერულ კოორდინატებში იპოვეთ ენერჯის დონეები და ნორმირებული

ტალღური ფუნქციები  $U(r) = \frac{kr^2}{2}$  სფერული ოსცილატორის.

4.30. აჩვენეთ, რომ სივრცული ოსცილატორისათვის

$$\hat{T}_{ik} = \hat{p}_i \hat{p}_k / m + k \hat{x}_i \hat{x}_k$$

ოპერატორები კომუტირებენ  $\hat{H} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{k\vec{r}^2}{2}$  ჰამილტონიანთან. ასევე აჩვენეთ,

რომ  $\hat{L}^2$  და  $\hat{T}_{11}$  ოპერატორები არ კომუტირებენ ერთმანეთთან.

4.31.\* იპოვეთ

$$U = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r} : A > 0; B > 0$$

პოტენციურ ველში მოძრავი ნაწილაკის ენერჯის დონეები.

**მიითითება:**  $\rho = \frac{2\sqrt{-2mE}}{\hbar} r$ ;  $\frac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1) = s(s+1)$ ;  $\frac{B}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{-2E}} = n$  აღნიშვნებით ამოცანა დადის კულონურ ველში მოძრაობაზე.

ნებით ამოცანა დადის კულონურ ველში მოძრაობაზე.

4.32.\* იპოვეთ

$$U = \frac{A}{r^2} + Br^2 : A > 0; B > 0$$

პოტენციურ ველში მოძრავი ნაწილაკის ენერჯის დონეები.

**მიითეთება:**  $\xi = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} r^2$ ;  $\frac{2mA}{\hbar^2} + l(l+1) = 2s(2s+1)$ ;  $\frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{B}} = 4(n+s)+3$

აღნიშვნებით და  $R = e^{-\xi/2} \xi^s$  ჩასმით ამოცანა დადის გადაგვარებული ჰიპერ-გეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე.

4.33.\* იპოვეთ დისკრეტული ენერჯიის დონეები  $l = 0$ -თვის ვუდ-საქსონის

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$

პოტენციალისათვის, სადაც  $a \ll R$ .

**მიითეთება:** დამოუკიდებელი ცვლადის შეცვლით  $y = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$  და  $\chi(y) =$

$= y^v (1-y)^u f(y)$  ჩასმით ამოცანა დადის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე.

4.34.\* იპოვეთ  $s$  დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები შემდეგი პოტენციალებისათვის:

ა)  $U(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^4} & ; r > a \\ \infty & ; r < a \end{cases}$

ბ)  $U(r) = -\frac{\alpha}{(r+a)^4} ; a > 0$

გ)  $U(r) = -\frac{U_0 a^4}{(r^2 + a^2)^2} ; a > 0$

**მიითეთება:** ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით  $E = 0$ -თვის.

4.35.\* იპოვეთ  $s$  დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები შემდეგი პოტენციალებისათვის:

ა)  $U(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^s} & ; r > a \\ \infty & ; r < a; s > 2 \end{cases}$       ბ)  $U(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^s} & ; r < a \\ 0 & ; r > a; 0 < s < 2 \end{cases}$

**მიითეთება:** ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით  $E = 0$ -თვის.

4.36.\* განიხილეთ დონეების არსებობისა და ახალი დისკრეტული დონეების გაჩენის პირობები  $l \neq 0$  შემთხვევაში, როდესაც ღრმავდება პოტენციური ორმო. რა

თვისობრივი განსხვავებაა  $l = 0$  შემთხვევისაგან. განიხილეთ კონკრეტული მაგალითები:

$$ა) U(r) = -\alpha\delta(r-a) \quad ბ) U(r) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{r^4} : r > a \\ \infty; r < a \end{cases}$$

**მითითება:** ისარგებლეთ შრედინგერის განტოლებით  $E = 0$ -თვის.

4.37.\* ცენტრალური  $U_0(r)$  პოტენციალის პარამეტრები ისეთია, რომ მას გააჩნია დისკრეტული სპექტრი  $l = 0$ -ით და  $E = 0$ . ამ მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია (ანუ დონის გაჩენის მომენტში)  $\Psi_0 = \frac{\chi_0(r)}{\sqrt{4\pi r}}$  ცნობილად ითვლება და ნორმირებულია შემდეგი პირობით:

$\chi_0(r) \rightarrow 1$ , როცა  $r \rightarrow \infty$ . აჩვენეთ, რომ ამ დონის  $\delta E_0$  ნანაცვლება  $\delta U < 0$  მცირე შეშფოთების გამო აღინერება შემდეგი გამოსახულებით:

$$\delta E_0 \approx -\frac{2m}{\hbar^2} \left[ \int_0^\infty \delta U(r) \chi_0^2(r) dr \right]^2.$$

**მითითება:** ამოხსნისას სიმარტივისათვის ჩათვალეთ, რომ  $U \equiv 0$ , როცა  $r > a$ , სადაც  $a$  პოტენციალის რადიუსია.

4.38.\* აჩვენეთ, რომ წინა 4.37 ამოცანის განზოგადებისას  $l \neq 0$  შემთხვევაში დონის  $\delta E_0$  ნანაცვლებისთვის მივიღებთ:

$$\delta E_l \approx \int_0^\infty \delta U(r) (\chi_l^{(0)}(r))^2 dr,$$

სადაც  $\chi_l^{(0)}$  ტალღური ფუნქციაა და დონის ნარმოქმნის მომენტში ( $\Psi^{(0)} = \chi_l^{(0)} Y_{lm} / r$ )

უკვე ნორმირებულია ჩვეულებრივი პირობით  $\int_0^\infty (\chi_l^{(0)}(r))^2 dr = 1$ . ყურადღება მი-

აქციეთ განსხვავებას:  $\delta E_l \propto \delta U$ , როცა  $l \neq 0$  და  $\delta E_0 \propto -(\delta U)^2$ , როცა  $l = 0$ . ახსენით ეს ფაქტი.

4.39.\* მიზიდვის მონოტონური პოტენციალისათვის  $U'(r) \geq 0$  და  $U(r) \rightarrow 0$ , როცა  $r \rightarrow \infty$ , აჩვენეთ, რომ შემდეგი უტოლობა

$$\frac{2}{\pi\hbar} \int_0^\infty \sqrt{-2mU(r)} dr \geq 1$$

აუცილებელი პირობაა ამ პოტენციალისთვის ბმული მდგომარეობის არსებობისათვის.

## 4.2. აქსიალური სიმეტრიის მქონე სისტემები

4.40. იპოვეთ  $I$  ინერციის მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორის სტაციონარული მდგომარეობების ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენ ჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.41. ბრტყელი როტატორის მდგომარეობა აღინერება ტალღური ფუნქციით  $\Psi = C \cos^n \varphi$ , სადაც  $n$  მთელი რიცხვია. იპოვეთ როტატორის განაწილების ფუნქცია იმპულსის მომენტის და ენერჯიის პროექციის მიხედვით. იპოვეთ აგრეთვე ამ სიდიდეების საშუალოები მოცემულ მდგომარეობაში.

4.42. იპოვეთ  $I$  ინერციის მომენტის მქონე სივრცული როტატორის სტაციონარული მდგომარეობების ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენ ჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.43. სივრცული როტატორის მდგომარეობა აღინერება ტალღური ფუნქციებით  $\Psi = C \cos^2 \theta$ . იპოვეთ როტატორის განაწილების ფუნქცია ენერჯიის, იმპულსის მომენტის კვადრატის და იმპულსის მომენტის პროექციის მიხედვით. იპოვეთ აგრეთვე ამ სიდიდეების საშუალოები მოცემულ მდგომარეობაში.

4.44. იპოვეთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის სტაციონარული მდგომარეობების ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები. რამდენ ჯერადაა გადაგვარებული დონეები?

4.45. ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის  $\Psi_{11}$  სტაციონარულ მდგომარეობაში იპოვეთ იმპულსის მომენტის პროექციის სხვადასხვა მნიშვნელობის პოვნის ალბათობები იმ ღერძზე, რომელიც რხევის სიბრტყის პერპენდიკულარულია.

4.46.\* ნაწილაკი იმყოფება აქსიალური სიმეტრიის მქონე  $U(\rho)$  ველში. იპოვეთ ენერჯიის დონეები და ტალღური ფუნქციები.

მითითება: ისარგებლეთ ცილინდრულ კოორდინატებით და იმ ფაქტით, რომ  $\hat{p}_z$  და  $\hat{L}_z$  ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამ ამოცანის ჰამილტონიანთან.

4.47.\* იპოვეთ ენერჯიის დონეები და სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება უსასრულო სიმაღლის ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში:

$$U(\rho) = \begin{cases} 0, & \rho \leq a \\ \infty, & \rho > a \end{cases}$$

**მიითითება:** ისარგებლეთ პოლარული კოორდინატებით და იმ ფაქტით, რომ  $\hat{L}_z$  ოპერატორი კომუტირებს ამ ამოცანის ჰამილტონიანთან და განტოლება დაიყვანეთ ბესელის ფუნქციების განტოლებაზე.

4.48.\* იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ენერჯის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება შემდეგ ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში:

$$U(\rho) = \begin{cases} -U_0, & \rho < a \\ 0, & \rho \geq a \end{cases}$$

განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც იმპულსის მომენტის პროექცია  $m = 0$  ნაწილაკის მოძრაობის მართობ სიბრტყეში. შეისწავლეთ, თუ რა ხდება მცირე სიღრმის  $\frac{ma^2U_0}{\hbar^2} \ll 1$  ორმოს შემთხვევაში.

**მიითითება:** ამონახსნი ეძებთ შემდეგი სახით:  $\Psi_{n,\rho,m} = \chi_{n,\rho,m}(\rho)e^{im\varphi}$ .

4.49.\* განიხილეთ ისევ წინა 4.48 ამოცანის შემთხვევა, ოღონდ აიღეთ  $m \neq 0$ . მიიღეთ დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობა.

**მიითითება:** წინა 4.48 ამოცანის საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაში გამოიყენეთ  $J_m(x)$  და  $K_m(x)$  ფუნქციებისათვის მცირე  $x$ -ებისათვის ასიმპტოტური გაშვებები.

4.50.\* იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ენერჯის დონეები ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება შემდეგ ორგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში  $U(\rho) = -\alpha\delta(\rho - a)$ . განიხილეთ შემთხვევა, როდესაც იმპულსის მომენტის პროექცია  $m = 0$  ნაწილაკის მოძრაობის მართობ სიბრტყეში. შეისწავლეთ მცირე  $\frac{m\alpha a}{\hbar^2} \ll 1$  და ღრმა

$\frac{m\alpha a}{\hbar^2} \gg 1$  ორმოების შემთხვევები.

**მიითითება:** ამოცანა იხსნება 4.48 ამოცანის ანალოგიურად.

4.51.\* განიხილეთ წინა 4.50 ამოცანა  $m \neq 0$  შემთხვევისათვის. მიიღეთ დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობა.

**მიითითება:** ამოცანა იხსნება 4.49 ამოცანის ანალოგიურად.

## თავი 5. მდგომარეობის ცვლილება დროში

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვანტურ-მექანიკური სისტემის ცვლილება დროში შეიძლება აღინეროს სხვადასხვა საშუალებით.

შრედინგერის წარმოდგენაში ტალღური ფუნქცია (მდგომარეობის ვექტორი) დროში იცვლება შრედინგერის დროითი განტოლების შესაბამისად:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(q, t) = \hat{H}\Psi(q, t), \quad (5.1)$$

ხოლო დინამიკური სიდიდეების ოპერატორები არ არიან დროზე დამოკიდებულნი. თუ ჰამილტონიანი ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე, სისტემის ტალღური ფუნქცია შეიძლება ჩაინეროს შემდეგი გაშლის სახით:

$$\Psi(q, t) = \sum_n c(E_n) e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}} \Psi_{E_n}(q), \quad (5.2)$$

სადაც  $\Psi_{E_n}(q)$  ფუნქციები ადგენენ სრულ სისტემას და წარმოადგენენ სტაციონარული მდგომარეობების ჰამილტონიანის საკუთარ ფუნქციებს. (5.2) გაშლაში  $c(E_n)$  კოეფიციენტები ცალსახად განისაზღვრებიან დროის საწყის მომენტში ტალღური ფუნქციის მნიშვნელობით:

$$c(E_n) = \int \Psi_{E_n}^*(q) \Psi(q, t=0). \quad (5.3)$$

ჰეიზენბერგის წარმოდგენაში, პირიქით, დროზე დამოკიდებული სისტემის ტალღური ფუნქცია, ხოლო დინამიკური სიდიდეების ოპერატორების დროზე დამოკიდებულება განისაზღვრება შემდეგი განტოლებებით:

$$\frac{d}{dt} \hat{q}_i(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{q}_i(t)], \quad \frac{d}{dt} \hat{p}_i(t) = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{p}_i(t)] \quad (5.4)$$

ამასთანავე,  $\hat{H}(\hat{q}(t), \hat{p}(t), t)$  ჰამილტონიანი გამოისახება ჰეიზენბერგის ოპერატორებით,  $\hat{q}(t)$  და  $\hat{p}(t)$ -თი, რომლებიც აკმაყოფილებენ კანონიკურ კომუტაციურ თანაფარდობებს:

$$[\hat{p}_i(t), \hat{q}_k(t)] = -i\hbar \delta_{ik}. \quad (5.5)$$

შრედინგერის და ჰეიზენბერგის თანაფარდობები უნიტარული გარდაქმნებით არიან ერთმანეთთან დაკავშირებული:

$$\Psi(q, t) = \hat{U}(t) \Psi_0(q) \quad (5.6)$$



თუ ჰამილტონიანი დროზე ცხადად არ არის დამოკიდებული, მაშინ

$\hat{U}(t) = \exp\left\{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}\right\}$  და ოპერატორებს შორის თანაფარდობას შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{f}_H(t) = e^{\frac{i\hat{H}t}{\hbar}} \hat{f}_{SH} e^{-\frac{i\hat{H}t}{\hbar}}. \quad (5.7)$$

5.1. შრედინგერის დროითი განტოლების საშუალებით გამოთვალეთ  $A$  ფიზიკური სიდიდის საშუალოს დროით წარმოებული და დაამტკიცეთ, რომ:

$$ა) \frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{A}]; \quad ბ) \frac{d}{dt} \langle A \rangle = \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle.$$

5.2. დაამტკიცეთ შემდეგი ოპერატორული ტოლობები:

$$ა) \frac{d}{dt} (\hat{A} + \hat{B}) = \frac{d\hat{A}}{dt} + \frac{d\hat{B}}{dt}; \quad ბ) \frac{d}{dt} (\hat{A}\hat{B}) = \frac{d\hat{A}}{dt} \hat{B} + \hat{A} \frac{d\hat{B}}{dt}.$$

5.3. დაამტკიცეთ შემდეგი მოძრაობის განტოლებები ოპერატორული ფორმით:

$$ა) \frac{dx}{dt} = \frac{\hat{p}_x}{m}; \quad ბ) \frac{d\hat{p}_x}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial x}.$$

5.4. ერენფესტის თეორემის თანახმად, საშუალო მნიშვნელობები მექანიკური სიდიდეებისა ემორჩილებიან კლასიკური მექანიკის კანონებს. დაამტკიცეთ, რომ ნაწილაკის  $U(x)$  პოტენციურ ველში მოძრაობისას სამართლიანია შემდეგი ტოლობები:

$$ა) \left\langle \frac{dx}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{p_x}{m} \right\rangle; \quad ბ) \left\langle \frac{dp_x}{dt} \right\rangle = -\left\langle \frac{\partial U}{\partial x} \right\rangle.$$

5.5. დაამტკიცეთ, რომ ნაწილაკის  $U(x)$  პოტენციურ ველში მოძრაობისას სამართლიანია შემდეგი ოპერატორული ტოლობები:

$$ა) \frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{1}{m} (x\hat{p}_x + \hat{p}_x x); \quad ბ) \frac{d}{dt} \langle x\hat{p}_x \rangle = \frac{\hat{p}_x^2}{m} - x \frac{\partial U}{\partial x};$$

$$ბ) \frac{d}{dt} \langle \hat{p}_x^2 \rangle = -\left( \hat{p}_x \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial x} \hat{p}_x \right).$$

5.6. იპოვეთ ნებისმიერ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკის  $\hat{\mathbf{v}} = \dot{\hat{\mathbf{r}}}$  სიჩქარის ოპერატორი.

5.7. იპოვეთ ნებისმიერ ელექტრომაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკის  $\hat{\mathbf{w}} = \dot{\hat{\mathbf{v}}}$  აჩქარების ოპერატორი.

5.8. აჩვენეთ, რომ დროზე ცხადად დამოუკიდებელი ფიზიკური სიდიდის დროით ნარმოებულის საშუალო მნიშვნელობა სტაციონარულ მდგომარეობაში ნულის ტოლია.

5.9.\* აჩვენეთ, რომ დისკრეტული სპექტრის სტაციონარულ მდგომარეობაში ნაწილაკზე მოქმედი ძალის საშუალო ნულის ტოლია.

**მითითება:** ამოცანა ამოხსენით 2 მეთოდით: ა) გამოიყენეთ წინა 5.8 ამოცანის შედეგი. ბ) უშუალოდ გაანარმოეთ დროით ძალის ოპერატორი.

5.10. აჩვენეთ, რომ  $\frac{d}{dt} \langle \hat{p}\hat{r} \rangle$  ოპერატორის გასაშუალოებით (ისევე როგორც ეს ხდება კლასიკურ მექანიკაში) შეიძლება მივიღოთ ვირიალის თეორემა კვანტურ მექანიკაში.

5.11.\* აჩვენეთ, რომ სივრცის შემოსაზღვრულ არეში  $N$  დამუხტული ნაწილაკის სისტემისათვის სრულდება შემდეგი ტოლობა:

$$\frac{2m}{e^2 \hbar^2} \sum_m (E_m - E_n) |(d_i)_{nm}|^2 = N \quad (i = 1, 2, 3),$$

სადაც  $(d_i)_{nm}$  სისტემის დიპოლური მომენტის მატრიცული ელემენტებია, აჯამვა ნარმოებს სისტემის ყველა სტაციონარული მდგომარეობებით, ხოლო  $m$  და  $e$  სისტემის თითოეული ნაწილაკის მასა და მუხტია.

**მითითება:** გამოიყენეთ დიპოლური ოპერატორის განმარტება  $\hat{d}_i = e \sum_{a=1}^N x_{ai}$  და

$\hat{x}_{ai}$  კოორდინატისა და  $\hat{x}_{bk}$  სიჩქარის ოპერატორების კომუტატურობა სხვადასხვა ნაწილაკისთვის ( $a \neq b$ ).

5.12.\* განიხილეთ შრედინგერის განტოლება, რომელშიც პოტენციური ენერგია კომპლექსური ფუნქციაა:  $U(\vec{r}) = U_0(\vec{r}) + iU_1(\vec{r})$ , სადაც  $U_0$  და  $U_0$  ნამდვილი ფუნქციებია. გამოარკვეთ, შეინახება თუ არა ასეთ ველში მოძრავი ნაწილაკის ტალღური ფუნქციის ნორმა? დროში ნორმის ცვლილება შეიძლება აიხსნას როგორც ნაწილაკების შთანთქმა ან გაჩენა გარეშე ველში. როგორ არის დაკავშირებული ამგვარ პროცესებთან პოტენციალის ნარმოსახვითი ნაწილის ნიშანი?

**მითითება:** შრედინგერის განტოლებიდან მიიღეთ უწყვეტობის განტოლება, რომელიც შემდეგ უნდა აინტეგროთ მთელი მოცულობით.

5.13.\* ნაწილაკის სტაციონარული მდგომარეობის ტალღური ფუნქცია სანყისს მომენტში ასეთია:

$$\Psi_n(x, t = 0) = A \sin^3 \frac{\pi x}{a}.$$

იპოვეთ ტალღური ფუნქცია დროის ნებისმიერ მომენტში. რა  $T$  დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა სანყისს მდგომარეობას?

**მიითითება:** გამოიყენეთ ტრიგონომეტრიული ფორმულა

$$\sin^3 z = \frac{3}{4} \sin z - \frac{1}{4} \sin 3z.$$

5.14. როგორ იცვლება დროში ბრტყელი როტატორის ტალღური ფუნქცია, თუ ცნობილია, რომ სანყის მომენტში ის აღინერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით:

$$\Psi(\varphi, t = 0) = A \sin^2 \varphi.$$

რა  $T$  დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა სანყის მდგომარეობას?

5.15. როგორ იცვლება დროში სივრცული როტატორის მდგომარეობა, თუ ცნობილია, რომ სანყის მომენტში ის აღინერება შემდეგი ტალღური ფუნქციით:

$$\Psi(\varphi, t = 0) = A \cos^2 \varphi.$$

რა  $T$  დროის შემდეგ დაუბრუნდება სისტემა სანყის მდგომარეობას?

5.16.\* თავისუფალი ნაწილაკის მდგომარეობა სანყის მომენტში აღინერება ტალღური ფუნქციით:

$$\Psi(x, t = 0) = A \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2} + \frac{imv_0 x}{\hbar}\right).$$

იპოვეთ ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია დროის ნებისმიერ მომენტში და  $\langle x(t) \rangle, \langle p(t) \rangle$  საშუალოები.

**მიითითება:**  $\Psi(x, t = 0)$  ფუნქცია გაშალეთ იმპულსის ოპერატორის საკუთარ ფუნქციებად.

5.17. თავისუფალი ნაწილაკის მდგომარეობა  $t = 0$  მომენტში აღინერება ნორმირებული  $\Psi_0(x)$  ტალღური ფუნქციით (ამასთან, ვიცით ტალღური ფუნქციის სახე  $\Phi_0(p)$  იმპულსურ წარმოდგენაში). იპოვეთ ტალღური ფუნქციის ასიმპტოტური ყოფაქცევა  $\Psi(x, t)$ , როცა  $t \rightarrow \infty$ . დარწმუნდით, რომ ინახება ტალღური ფუნქციის ნორმა.

5.18. აჩვენეთ, რომ, თუ  $\hat{f}_1$  და  $\hat{f}_2$  სისტემის მოძრაობის ინტეგრალებია, მაშინ  $\hat{g}_1 = \hat{f}_1 \hat{f}_2 + \hat{f}_2 \hat{f}_1$  და  $\hat{g}_2 = i(\hat{f}_1 \hat{f}_2 - \hat{f}_2 \hat{f}_1)$  ოპერატორებიც მოძრაობის ინტეგრალებია.

5.19. აჩვენეთ, რომ ერთგვაროვან ველში  $\hat{G} = \hat{p} - \vec{F}_0 t$  ოპერატორი შენახვადი სიდიდის შესაბამისი ოპერატორია ( $\vec{F}_0$  არის ძალა, რომელიც ნაწილაკზე მოქმედებს). შედეგი შეადარეთ კლასიკური მექანიკის შედეგს.

5.20. იპოვეთ თავისუფალი ნაწილაკის კოორდინატისა და იმპულსის ჰეიზენბერგის ოპერატორები.

**მითითება:** გამოიყენეთ ორი მეთოდი: ა) შრედინგერისა და ჰეიზენბერგის წარმოდგენების დამაკავშირებელი უნიტარული გარდაქმნა; ბ) ამოხსენით ჰეიზენბერგის ოპერატორებისათვის მოძრაობის განტოლება.

5.21. იპოვეთ ნაწილაკის კოორდინატისა და იმპულსის ჰეიზენბერგის ოპერატორები, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან ველში  $U = -F_0 x$ .

5.22. იპოვეთ ნაწილაკის კოორდინატისა და იმპულსის ჰეიზენბერგის ოპერატორები წრფივი ჰარმონიული ოსცილატორისათვის.

5.23. გამოიყენეთ ჰეიზენბერგის ოპერატორები კოორდინატისა და იმპულსისათვის და წინა 5.20-5.22 ამოცანებში განხილული სისტემებისათვის იპოვეთ შემდეგი საშუალოები:

$$\langle x(t) \rangle, \langle p(t) \rangle, \langle [\Delta x(t)]^2 \rangle, \langle [\Delta p(t)]^2 \rangle$$

სისტემების ტალღური ფუნქციას:

$$\Psi(x) = A \exp \left\{ \frac{ip_0 x}{\hbar} - \frac{(x - x_0)^2}{2a^2} \right\}$$

5.24. ჰეიზენბერგის ოპერატორებისათვის მოძრაობის განტოლების გამოყენებით დაამტკიცეთ, რომ  $[\hat{p}_i(t), \hat{x}_k(t)] = -i\hbar \delta_{ik}$

5.25. 5.20-5.22 ამოცანებში მითითებული სისტემებისათვის იპოვეთ „სხვადასხვა“ დროიანი კომუტატორი  $[\hat{p}(t), \hat{x}(t')]$ .

5.26. ნაწილაკი იმყოფება ერთგვაროვან დროში ცვალებად ველში, ამასთან, ძალა  $F(t) \rightarrow 0$ , როცა  $t \rightarrow \pm\infty$ . იპოვეთ ძალის მოქმედების შედეგად ნაწილაკის საშუალო ენერჯიის ცვლილება.

5.27. იპოვეთ უნიტარული ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება გალილეის გარდაქმნას, ანუ გადასვლას ახალ ინერციულ ათვლის სისტემაში. დარწმუნდით შრედინგერის განტოლების ინვარიანტობაში ამ გარდაქმნის მიმართ. როგორ გარდაიქმნება ამ დროს ნაწილაკის ტალღური ფუნქცია კოორდინატულ და იმპულსურ წარმოდგენებში?

5.28. იპოვეთ უნიტარული ოპერატორი, რომელიც შეესაბამება ელექტრომაგნიტური ველების ყალიბრულ გარდაქმნას. დარწმუნდით შრედინგერის განტოლების ინვარიანტობაში ამ გარდაქმნის მიმართ.

5.29. დამუხტული ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, იპოვეთ ნაწილაკის რადიუს-ვექტორის და იმპულსის ოპერატორები

ჰეიზენბერგის წარმოდგენაში. აირჩიეთ ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბობა  $\vec{A} = (0, H_0 x, 0)$  (მაგნიტური ველი მიმართულია  $z$  ღერძის გასწვრივ).

**მიითითება:** გამოიყენეთ ორი მეთოდი: ა) შრედინგერისა და ჰეიზენბერგის წარმოდგენების დამაკავშირებელი უნიტარული გარდაქმნა; ბ) ამოხსენით ჰეიზენბერგის ოპრატორებისათვის მოძრაობის განტოლება.

5.30. 5.20-5.22 ამოცანებში განხილული სისტემებისათვის იპოვეთ ჰამილტონიანი  $\hat{H}(t)$  და შეადარეთ ის  $\hat{H}(t=0)$ -ს.

5.31. რომელი მექანიკური სიდიდეები (ენერგია, იმპულსის პროექცია, იმპულსის მომენტის კვადრატი და პროექცია) ინახება ნაწილაკის შემდეგ ველებში მოძრაობისას:

- ა) ველის არარსებობისას (თავისუფალი მოძრაობა);
- ბ) ერთგვაროვანი პოტენციური ველი  $U(z) = az$ , სადაც  $a$  მუდმივია;
- გ) ცენტრალურ-სიმეტრიული ველი  $U(r)$ ;
- დ) ერთგვაროვანი ცვლადი ველი  $U(z, t) = a(t)z$ .

5.32. ნაწილაკი იმყოფება გარკვეულ  $\Psi(x, t)$  მდგომარეობაში, რომელიც არ არის საკუთარი ფუნქცია  $\hat{A}$  ოპერატორისა.  $\hat{A}$  ოპერატორი ცხადად არ არის დამოკიდებული დროზე და კომუტირებს  $\hat{H}$  ჰამილტონიანთან. აჩვენეთ, რომ:

- ა) ინახება  $A$  სიდიდის საშუალო;
- ბ)  $A$  სიდიდის გარკვეული მნიშვნელობების პოვნის ალბათობები არ არის დროზე დამოკიდებული.

5.33. როგორ შეიცვლება სტაციონარული მდგომარეობის აღმწერი სრული ტალღური ფუნქცია  $\Psi(x, t)$ , თუ შევცვლით პოტენციური ენერგიის ათვლის წერტილს გარკვეული  $\Delta U$  სიდიდით.

5.34. იპოვეთ შრედინგერის დროითი განტოლების ამონახსნი თავისუფალი ნაწილაკისთვის, რომელიც მოძრაობს  $P$  იმპულსით  $X$  ღერძის დადებითი მიმართულებით.

5.35. იპოვეთ  $\Psi(x, t)$  სრული ტალღური ფუნქციის 2.7 ამოცანის ტალღურ ფუნქციებად გაშლის კოეფიციენტები.

5.36.\*  $m$  მასის ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა

$$\Psi(x, t) = Ae^{-a \left[ \frac{mx^2}{\hbar} + it \right]},$$

სადაც  $A$  და  $a$  ნამდვილი დადებითი მუდმივებია.

ა) იპოვეთ  $A$ ;

ბ) რომელი  $V(x)$  პოტენციალისათვის  $\Psi(x,t)$  ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებს შრედინგერის განტოლებას?

**მითითება:** გამოთვალეთ  $\Psi(x,t)$ -ის პირველი წარმოებული დროით და მეორე წარმოებული კოორდინატით და ჩასვით შრედინგერის დროით განტოლებაში.

5.37.  $m$  მასის ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi(x,t) = Ae^{-a\left[\frac{mx^2}{\hbar} + it\right]}.$$

იპოვეთ  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\sigma_x$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$ ,  $\sigma_p$ . აკმაყოფილებს თუ არა ჰეიზენბერგის თანაფარდობას  $\sigma_x \sigma_p$  ნამრავლი?

5.38.\* ნორმირებული სტაციონარული მდგომარეობებისათვის დაამტკიცეთ, რომ  $E$  ნამდვილი სიდიდეა.

**მითითება:**  $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\frac{Et}{\hbar}}$  გამოსახულებაში ჩანერგეთ  $E = E_0 + i\Gamma$  (სადაც  $E_0$  და  $\Gamma$  ნამდვილი რიცხვებია) და აჩვენეთ, რომ, თუ სრულდება პირობა  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$  ყველა  $t$ -თვის, მაშინ აუცილებლად  $\Gamma = 0$ .

5.39.\*  $t = 0$  მომენტში 2.7 ამოცანის ტალღური ფუნქცია პირველი ორი სტაციონარული დონის სუპერპოზიციას თანაბარი წონითი წვლილით:

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + \psi_2(x)]$$

ა) იპოვეთ  $A$ ;

**მითითება:** გამოიყენეთ  $\psi_1$  და  $\psi_2$  ფუნქციების ორთოგონალობის პირობა.

ბ) იპოვეთ  $\Psi(x,t)$  და  $|\Psi(x,t)|^2$ . მოხერხებულობისათვის შემოიღეთ სიდიდე

$$\omega = \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2};$$

გ) გამოთვალეთ  $\langle x \rangle$ . ეს საშუალო დროში ოსცილირებს. იპოვეთ ამ ოსცილაციის სიხშირე და ამპლიტუდა;

დ) იპოვეთ  $\langle p \rangle$ ;

ე) იპოვეთ  $\langle H \rangle$ .

5.40.\* წინა (5.39) ამოცანის ტალღურ ფუნქციაში შემოვიტანოთ ფაზური  $\phi$  მამრავლი

$$\Psi(x,0) = A[\psi_1(x) + e^{i\phi}\psi_2(x)].$$

იპოვეთ  $\Psi(x,t)$ ,  $|\Psi(x,t)|^2$  და  $\langle x \rangle$ . შეადარეთ შედეგები წინა ამოცანის შედეგებს. განიხილეთ  $\phi = \frac{\pi}{2}$  და  $\phi = \pi$  შემთხვევები.

5.41.\* ნაწილაკის ყოფაქცევა ერთგანზომილებიან ორმოში  $x \in (0, a)$  აღინერება სანყისი ტალღური ფუნქციით  $\Psi(x,0) = Ax(a-x)$ , სადაც  $A$  მუდმივაა. იპოვეთ  $\Psi(x,t)$ .

**მიითვება:** გამოიყენეთ 5.35 ამოცანის შედეგი  $\Psi(x,t)$ -ის საპოვნელად.

5.42.\* ჰარმონიული ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა:

$$\psi(x,0) = A[\psi_0(x) + \psi_1(x)],$$

სადაც  $A$  მუდმივაა.

ა) იპოვეთ  $A$  მუდმივა;

ბ) იპოვეთ  $\Psi(x,t)$  და  $|\Psi(x,t)|^2$ ;

გ) იპოვეთ  $\langle x \rangle$ , როგორც დროის ფუნქცია. შევნიშნოთ, რომ ის ოსცილირებს. იპოვეთ ამ ოსცილაციის ამპლიტუდა და კუთხური სიხშირე.

დ) გამოიყენეთ გ) შედეგი და იპოვეთ  $\langle p \rangle$ . შეამონმეთ, რომ ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

5.43.\* განიხილეთ მოძრავი დელტაფუნქციის კედელი:

$$V(x,t) = -\alpha\delta(x-vt),$$

სადაც  $v$  არის კედლის მუდმივი სიჩქარე.

ა) აჩვენეთ, რომ დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას აქვს ზუსტი ამონახსნი:

$$\Psi(x,t) = \frac{\sqrt{m\alpha}}{\hbar} e^{-\frac{m\alpha|x-vt|}{\hbar^2}} e^{-i\frac{\left(E + \frac{1}{2}mv^2\right)t - mvx}{\hbar}},$$

სადაც  $E = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$  არის ბმული მდგომარეობების ენერგია.

**მიითვება:** პირდაპირი ჩასმით აჩვენეთ, რომ კმაყოფილდება შრედინგერის დროზე დამოკიდებული განტოლება;

ბ) იპოვეთ ამ მდგომარეობაში ჰამილტონიანის საშუალო და გაანალიზეთ მიღებული შედეგი.

5.44. ა) აჩვენეთ, რომ:

$$\psi(x,t) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}\left(x^2 + \frac{a^2}{2}(1 + e^{-2i\omega t}) + \frac{i\hbar t}{m} - 2axe^{-i\omega t}\right)\right]$$

ტალღური ფუნქცია აკმაყოფილებს დროზე დამოკიდებულ შრედინგერის განტოლებას ჰარმონიული ოსცილატორისათვის  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$  პოტენციალით.

აქ  $a$  ნამდვილი მუდმივაა.

ბ) იპოვეთ  $|\psi(x,t)|^2$ .

გ) გამოითვალეთ  $\langle x \rangle$  და  $\langle p \rangle$  და შეამოწმეთ, რომ კმაყოფილდება ერენფესტის თეორემა.



## თავი 6. კვანძურ-მექანიკური ამოცანების ამოხსნის მიახლოებითი მეთოდები

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

შეშფოთების თეორიის მეთოდები დაფუძნებულია ჰამილტონიანის შემდეგი სახით წარმოდგენაზე:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}, \quad (6.1)$$

სადაც  $\hat{V}$  შეშფოთება მცირე შესწორებაა და იგულისხმება, რომ  $\hat{H}_0$  შეუშფოთებელი ჰამილტონიანით ცნობილია შრედინგერის განტოლების ამოხსნები. ეს მეთოდები საშუალებას იძლევა თანმიმდევრული იტერაციების გამოყენებით განიხილოთ ის ეფექტები, რომელსაც ინვესს შეშფოთების ზემოქმედება.

1) სტაციონარულ შემთხვევაში, როდესაც  $\hat{H}_0$  და  $\hat{V}$  ანუ  $\hat{H}$  არ არის დროზე დამოკიდებული, მაშინ  $\hat{H}$  ჰამილტონიანის დისკრეტული სპექტრის საკუთარი მნიშვნელობანი და შესაბამისი საკუთარი ფუნქციები შეშფოთების შემდეგი მწკრივის სახით წარმოდგება:

$$E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots; \quad (6.2)$$

$$\Psi_n = \sum_m c_{nm} \Psi_m^{(0)}; \quad c_{nm} = c_{nm}^{(0)} + c_{nm}^{(1)} + \dots, \quad (6.3)$$

სადაც  $E_n^{(0)}$  და  $\Psi_n^{(0)}$  სპექტრი და საკუთარი ფუნქციებია  $\hat{H}_0$  შეუშფოთებელი ჰამილტონიანის. მაშინ, თუ შეუშფოთებელი  $E_n^{(0)}$  დონეები გადაუგვარებელია, გვექნება

$$E_n^{(1)} = \langle \Psi_n^{(0)} | \hat{V} | \Psi_n^{(0)} \rangle \equiv \langle n | \hat{V} | n \rangle, \quad E_n^{(2)} = \sum_m \frac{|\langle m | \hat{V} | n \rangle|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} \quad (6.4)$$

(ამ ჯამში არ გვაქვს  $m = n$  შესაკრები), ხოლო საკუთარი ფუნქციებისათვის

$$c_{nk}^{(0)} = \delta_{nk}; \quad c_{nn}^{(1)} = 0; \quad c_{nk}^{(1)} = \frac{\langle k | \hat{V} | n \rangle}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}, \quad k \neq n. \quad (6.5)$$

შეშფოთების თეორიის გამოყენების კრიტერიუმია ( $n \neq k$ ):

$$|\langle k | \hat{V} | n \rangle| \ll |E_n^{(0)} - E_k^{(0)}|. \quad (6.6)$$

თუ შეუშფოთებელი  $E_n^{(0)}$  დონე  $s$ -ჯერადად გადაგვარებულია და მას შეესაბამება ურთიერთორთოგონალური საკუთარი ფუნქციები  $\Psi_{n,\alpha}^{(0)}$ , სადაც  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ , მაშინ ნულოვანი მიახლოების სწორი საკუთარი ფუნქციებია:

$$\Psi_n = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^{(0)} \Psi_{n,\alpha}^{(0)} \quad (6.7)$$

და შესაბამისი ენერჯის პირველი რიგის  $E_n^{(1)}$  შესწორებები განისაზღვრებიან განტოლებათა შემდეგი სისტემიდან

$$\sum_{\beta} \left( \langle n\alpha | \hat{V} | n\beta \rangle - E_n^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right) c_{\beta}^{(0)} = 0. \quad (6.8)$$

(6.8) სისტემის არატრივიალური ამოხსნადობის მოთხოვნიდან ვღებულობთ სეკულარულ განტოლებას:

$$\left| \langle n\alpha | \hat{V} | n\beta \rangle - E_n^{(1)} \delta_{\alpha\beta} \right| = 0, \quad (6.9)$$

რომლის  $E_n^{(1)}$  ფესვები (მათი რიცხვი არის  $s$ ) განსაზღვრავენ  $\hat{H}_0$  შეუშფოთებელი ჰამილტონიანის დონეების გახლეჩას (თუ ყველა  $E_n^{(1)}$  ფესვი განსხვავებულია, მაშინ გადაგვარება მთლიანად იხსნება, ჯერადი ფესვების არსებობისას კი გადაგვარება ნაწილობრივ იხსნება) და ამ ფესვების (6.8) სისტემიდან ჩასმა საშუალებას იძლევა იპოვეთ ნულოვან მიახლოებაში შესაბამისი ქვედონეების ტალღური ფუნქციები.

2) რიგ შემთხვევებში გამოიყენება ვარიაციული მეთოდი ენერჯის დონეების გამოსათვლელად. ამ მეთოდის საფუძველს წარმოადგენს შემდეგი უტოლობა:

$$E_0 \leq \int \psi^* \hat{H} \psi dq, \quad (6.10)$$

სადაც  $E_0$  ძირითადი მდგომარეობის ენერჯიაა (ანუ იმ მდგომარეობისა, რომლის ენერჯიაც მინიმალურია),  $\hat{H}$  ჰამილტონის ოპერატორია, ხოლო  $\psi$  ნებისმიერი ნორმირებული ფუნქციაა, რომელთაც საცდელი ფუნქციები ეწოდებათ. ვარიაციული მეთოდით ამოცანა შემდეგნაირად იხსნება:

- ა) ირჩევენ ნორმირებულ საცდელ  $\psi$  ფუნქციებს, რომლებიც გარკვეულ  $\alpha, \beta$  და ა.შ. პარამეტრებზეა დამოკიდებული;
- ბ) ითვლიან ფუნქციონალს  $J(\alpha, \beta, \dots) = \int \psi^* \hat{H} \psi dq$ , რომელიც იმავე პარამეტრებზეა დამოკიდებული;
- გ) პოულობენ  $\alpha, \beta$  და ა.შ. პარამეტრების იმ მნიშვნელობებს, რომელთათვისაც  $J$  მინიმუმს აღწევს, რისთვისაც აუცილებელია განტოლებათა სისტემის ამოხსნა

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = 0, \frac{\partial J}{\partial \beta} = 0, \dots \quad (6.11)$$

საცდელი ფუნქციის წარმატებით შერჩევას ენერჯის მიღებული მნიშვნელობა

$$E_0 = J(\alpha_0, \beta_0, \dots) \quad (6.12)$$

ახლოს იქნება ენერჯის ნამდვილ მნიშვნელობასთან გამოყენებული პარამეტრების მცირე რაოდენობისთვისაც კი.

ვარიაციული მეთოდი შეიძლება გამოყენებულ იქნეს ალგზნებული მდგომარეობებისთვისაც. ასე მაგალითად, პირველი ალგზნებული დონის საპოვნელად ჯერ უნდა იპოვეთ შემდეგი ფუნქციონალის მინიმუმი:

$$J_1 = \int \psi_1^* \hat{H} \psi_1 dq, \quad (6.13)$$

სადაც  $\psi_1$  ნორმირებული ფუნქციაა, რომელიც ორთოგონალურია ძირითადი მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციასთან. ასევე შეიძლება იქნეს ნაპოვნი უფრო მაღალი ალგზნების ტალღური ფუნქციები.

აუცილებელია აღინიშნოს, რომ ენერჯის ზუსტი მნიშვნელობები  $E_n^{(0)}$  და ვარიაციული მეთოდით მიღებული  $E_n$  მნიშვნელობები შემდეგ უტოლობას აკმაყოფილებენ:

$$E_n^{(0)} \leq E_n. \quad (6.14)$$

ვარიაციული მეთოდით ნაპოვნი ტალღური ფუნქციები შეიძლება არ იყვნენ  $\hat{H}$  ჰამილტონის ოპერატორის საკუთარი ფუნქციები. ისინი საკუთარი ფუნქციები მხოლოდ მაშინ გახდებიან, თუ პარამეტრების წარმატებული არჩევას ვარიაციული მეთოდით ვლელულობთ ზუსტ ამონახსნებს. ამ შემთხვევაში (6.14) თანაფარდობაში გვექნება ტოლობა.

3) დროზე დამოკიდებული  $\hat{V}(t)$  შემფოთების შემთხვევაში შრედინგერის დროზე დამოკიდებული განტოლების

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t))\Psi \quad (6.15)$$

ტალღური ფუნქციისათვის გვაქვს:

$$\Psi(q, t) = \sum_k a_k(t) \exp\left\{-\frac{iE_k^{(0)}t}{\hbar}\right\} \Psi_k^{(0)}(q), \quad (6.16)$$

რომელშიც  $a_k(t)$  კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ შემდეგ სისტემას:

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) \exp\{i\omega_{mk}t\} a_k, \quad (6.17)$$

სადაც

$$V_{mk}(t) = \int \Psi_m^{(0)*}(q) \hat{V}(t) \Psi_k^{(0)}(q) d\tau_q; \quad \omega_{mk} = \frac{E_m^{(0)} - E_k^{(0)}}{\hbar}. \quad (6.18)$$

(6.17) სისტემის ამოხსნა თანმიმდევრული იტერაციებით

$$a_k(t) = a_k^{(0)}(t) + a_k^{(1)}(t) + \dots \quad (6.19)$$

იძლევა  $a_k^{(0)}(t) = const$ . შემდგომ თუ ჩავთვლით, რომ  $\hat{V}(t) \rightarrow 0$ , როცა  $t \rightarrow -\infty$  და ამ დროს (ანუ შეშფოთების ჩართვამდე) სისტემა იმყოფება დისკრეტული სპექტრის ნებისმიერ  $n$  მდგომარეობაში და ამიტომ  $a_k(t \rightarrow -\infty) \rightarrow \delta_{nk}$ , ვირჩევთ  $a_k^{(0)} \equiv a_{kn}^{(0)} = \delta_{nk}$ . პირველი რიგის შესწორებისათვის  $a_{kn}^{(1)}(t = -\infty) = 0$  პირობის გათვალისწინებით (6.17) სისტემიდან ვღებულობთ:

$$a_{kn}^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt. \quad (6.20)$$

თუ  $t \rightarrow \infty$ -თვის  $\hat{V}(t)$  შეშფოთება ქრება, მაშინ  $a_{kn}^{(1)}(t = \infty)$  შეშფოთების მწკრივის პირველ რიგში განსაზღვრავს იმის ალბათობას, რომ სისტემა საწყისი ნებისმიერი  $n$  მდგომარეობიდან გადავიდეს საბოლოო  $k$  ( $k \neq n$ ) მდგომარეობაში მისი მთელი მოქმედების მანძილზე:

$$W^{(1)}(n \rightarrow k) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{kn}(t) e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2. \quad (6.21)$$

## 6.1. შეშფოთების სტაციონარული თეორია

6.1. ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება  $a$  სივრცის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში, შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ენერგიის წანაცვლება შემდეგი შეშფოთებებისას:

ა)  $V(x) = \frac{V_0}{a} (a - |2x - a|);$

ბ)  $V(x) = \begin{cases} V_0, & b < x < a - b \\ 0, & 0 < x < b, \quad a - b < x < a \end{cases}$

შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის.

6.2. აჩვენეთ, რომ წინა 6.1. ამოცანის ნაწილაკის ენერგეტიკული დონეების პირველი რიგის  $E^{(1)}$  შესწორება ნებისმიერი  $V(x)$  შეშფოთებისას ზედა დონეებისთვის (დიდი  $n$ -თვის), არ არის დამოკიდებული  $n$ -ზე.

6.3. დამუხტული ნრფივი ოსცილატორი მოთავსებულია ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, რომლის  $\vec{E}$  დაძაბულობის ვექტორი მიმართულია ოსცილატორის რხევის ღერძის გასწვრივ. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება. მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

6.4. დამუხტული ნაწილაკი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში ერთგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში და მასზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება.

6.5. ოსცილატორის ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{kx^2}{2} + \frac{\alpha x^2}{2}.$$

განიხილეთ  $\frac{\alpha x^2}{2}$  წევრი, როგორც შეშფოთება და იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება. შეისწავლეთ მიღებული შეშფოთების მწკრივის კრებადობის საკითხი.

6.6. ნაწილაკზე, რომელიც იმყოფება  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში, მოდებულია შემდეგი შეშფოთება:

$$V(x) = V_0 \cos^2 \frac{\pi x}{a}.$$

იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება.

6.7. წინა 6.6 ამოცანაში იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ნაწილაკის ძირითადი ენერგეტიკული დონის მესამე რიგის შესწორება.

6.8. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის ფარგლებში ენერგეტიკული დონეების პირველი ორი რიგის შესწორება 6.1 ამოცანის პირობებში, როდესაც შეშფოთებას შემდეგი სახე აქვს:

$$V(x) = \alpha \delta(x - a/2).$$

შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის.

6.9. როგორც ცნობილია, შეშფოთების თეორიის ფარგლებში პირველი რიგის შესწორებას შემდეგი სახე აქვს:

$$\Psi_n \approx \Psi_n + \sum_k c_{nk}^{(1)} \Psi_k^{(0)}; c_{nk}^{(0)} = \frac{V_{kn}}{E_n^{(0)} - E_k^{(0)}}; k \neq n,$$

ხოლო  $c_{mn}^{(1)}$  კოეფიციენტების მნიშვნელობები განუსაზღვრელი რჩება (როგორც წესი, თვლიან, რომ  $c_{mn}^{(1)} = 0$ ). ახსენით, რატომ წარმოიშობა ეს განუზღვრელობა. შენარჩუნდება თუ არა ეს განუზღვრელობა  $c_{mn}^{(p)}$ -ების გამოთვლისას შემფოთების თეორიის უფრო მაღალ რიგებში?

6.10.  $I$  ინერციის მომენტის და  $\vec{d}$  ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი იმყოფება ერთგვაროვან ელექტრულ ველში, რომლის  $\vec{E}_0$  დაძაბულობის ვექტორი მოთავსებულია როტატორის ბრუნვის სიბრტყეში. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შემფოთება და იპოვეთ როტატორის ძირითადი მდგომარეობის პოლარიზაცია.

6.11.  $I$  ინერციის მომენტის და  $\vec{d}$  ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე სივრცული როტატორი ( $\vec{d}$  პარალელურია როტატორის ღერძის) მოთავსებულია  $\vec{E}_0$  დაძაბულობის მქონე ერთგვაროვან ელექტრულ ველში. განიხილეთ ელექტრული ველის ზემოქმედება, როგორც შემფოთება და იპოვეთ როტატორის ძირითადი მდგომარეობის პოლარიზაცია.

6.12. იპოვეთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის პირველი ადგზნებული დონის გახლეჩა  $V = \alpha xy$  ( $x, y$  სიბრტყეში ხდება რხევა) შემფოთების ზემოქმედების გამო შემფოთების თეორიის პირველ რიგში.

6.13. იპოვეთ ბრტყელი ჰარმონიული ოსცილატორის მეორე ადგზნებული დონის გახლეჩა  $V = \alpha xy$  ( $x, y$  სიბრტყეში ხდება რხევა) შემფოთების ზემოქმედების გამო შემფოთების თეორიის პირველ რიგში.

6.14.\* დამუხტული ნაწილაკი მოძრაობს ერთგანზომილებიან  $U = -\alpha\delta(x)$  პოტენციურ ველში. იპოვეთ ენერგიის გახლეჩა სუსტ ელექტრულ ველში და ძირითადი დონის პოლარიზაცია.

**მიითითება:** გამოიყენეთ შემდეგი ინტეგრალი  $\int_{-\infty}^{\infty} x \sin kx e^{-\eta|x|} dx = \frac{4\eta k}{(x^2 + k^2)^2}$  და დამატების (A.10) ინტეგრალი.

6.15.\*  $I$  ინერციის მომენტის და  $\vec{d}$  ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი იმყოფება ძლიერ ელექტრულ ველში  $\left( dE \gg \frac{\hbar^2}{I} \right)$ . იპოვეთ როტატორის სპექტრის ქვედა ნაწილის ენერგეტიკული დონეებისა და ტალღური ფუნქციების მიახლოებითი სახე.

**მიითითება:** ძლიერ ელექტრულ ველში როტატორის ქვედა დონეები ლოკალიზებულია მცირე კუთხეებზე  $|\varphi| \ll 1$ . ამიტომ  $U = -d\mathcal{E} \cos \varphi$  ენერგია გაშალეთ მსკრივად  $\varphi$ -ს მიხედვით და შემოიფარგლეთ გაშლის  $\varphi^2$  წევრით.

6.16.\*  $I$  ინერციის მომენტის და  $\vec{d}$  ელექტრული დიპოლური მომენტის მქონე სივრცული როტატორი იმყოფება ძლიერ ელექტრულ ველში  $\left( d\mathcal{E} \gg \frac{\hbar^2}{I} \right)$ . იპოვეთ

როტატორის სპექტრის ქვედა ნაწილის ენერგეტიკული დონეებისა და ტალღური ფუნქციების შესწორებები შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში.

მიითითება: ამოცანა იხსნება 6.15 ამოცანის ანალოგიურად.

6.17.\* ნაწილაკი იმყოფება ბრუნვის ელიფსოიდის შიგნით, რომლის პოტენციალია:

$$U(x, y, z) = \begin{cases} 0, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} < 1, \\ \infty, & \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} > 1 \end{cases}$$

ამასთან,  $|a - b| \ll a$ . იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ნაწილაკის ძირითადი ენერგიის დონის შესწორება. შეუშფოთებელ ობიექტად ჩათვალეთ ელიფსოიდის მოცულობის სფერო.

**მიითითება:** შემოიღეთ ახალი ცვლადები  $x' = x, y' = y, z' = \frac{az}{b}$  და შეშფოთების

ოპერატორად განიხილეთ შემდეგი ოპერატორი:  $\hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} (2\mathcal{E} + \mathcal{E}^2) \frac{\partial^2}{\partial z'^2}$ , სადაც

$|\mathcal{E}| \ll 1$  განისაზღვრება  $a = (1 + \mathcal{E})b$  თანაფარდობიდან.

6.18.\* ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ ცენტრალურ ველში:

$$U(r) = -\frac{U_0}{\frac{r}{a} - 1}$$

ამასთან,  $\frac{ma^2 U_0}{\hbar^2} \gg 1$ . შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ამოცანის

ენერგეტიკული სპექტრის ქვედა ნაწილის განსხვავება  $\hat{U}(r) = -\frac{U_0 a}{r}$  კულონური პოტენციალის სპექტრისაგან.

**მითითება:** შეშფოთების ოპერატორად აიღეთ  $V(r) = -U_0 \left[ \frac{1}{\exp(r/a) - 1} - \frac{a}{r} \right]$

ოპერატორი და შემდეგ ეს ოპერატორი გაშალეთ  $r/a$  ხარისხების მწკრივად პირველ რიგამდე.

6.19.\* ნაწილაკი იმყოფება იუკავას პოტენციალის ველში:

$$U(r) = -\frac{\alpha e^{-r/a}}{r}$$

ამასთან,  $\frac{ma\alpha U_0}{\hbar^2} \gg 1$ . შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ამოცანის

ენერგეტიკული სპექტრის ქვედა ნაწილის განსხვავება  $\hat{U}(r) = -\frac{U_0 a}{r}$  კულონური პოტენციალის სპექტრისაგან.

**მითითება:** ამოცანა იხსნება 6.18 ამოცანის ანალოგიურად.

6.20.\* ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში:

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^p}; \quad 0 < p < 2; \quad \alpha > 0$$

იპოვეთ  $E_{n,l}$  ენერგეტიკული დონეები დიდი  $l \gg 1$  ორბიტალური მომენტისათვის. (ამასთან,  $n_r$  რადიალური რიცხვი შესაძლოა არც ისე დიდი იყოს). შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის. კულონური ველისათვის ( $p = 1$ ) მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

**მითითება:** გაშალეთ ეფექტური პოტენციალი  $U_{eff} = -\frac{\alpha}{r^p} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$  მინიმუმის წერტილის  $r_0$ -ის მახლობლად.

6.21. ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში:

$$U(r) = \alpha r^\nu; \quad \alpha, \nu > 0$$

იპოვეთ  $E_{n,l} > 0$  ენერგეტიკული დონეები დიდი  $l \gg 1$  ორბიტალური მომენტისათვის. (ამასთან,  $n_r$  რადიალური რიცხვი შესაძლოა არც ისე დიდი იყოს). შეისწავლეთ შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობები ამ ამოცანისათვის. სფერული ოსცილატორისათვის ( $\nu = 2$ ) მიღებული შედეგი შეადარეთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს.

**მითითება:** ამოცანა იხსნება 6.20 ამოცანის ანალოგიურად.



6.22. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის  $\psi_n^{(2)}$  მეორე რიგის შესწორება ტალღური ფუნქციისათვის.

6.23. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის  $E_n^{(2)}$  მესამე რიგის შესწორება ენერჯის დონისათვის.

6.24. იპოვეთ ენერჯის დონეები წრფივი ანჰარმონიული ოსცილატორისათვის, რომლის ჰამილტონიანია:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x^4.$$

6.25. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება ენერჯის საკუთარი მნიშვნელობისათვის და ნულოვანი რიგის სწორი ფუნქციები ორჯერადად გადაგვარებული დონისათვის.

6.26. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის მეორე რიგის შესწორება ენერჯის საკუთარი მნიშვნელობისათვის ორჯერადად გადაგვარებული დონისათვის.

6.27. ნაწილაკი იმყოფება სფერული სიმეტრიის ველში (შეშფოთებელი ამოცანა) და მისი ენერჯის დონეებია  $E_{nl}$ . იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ენერჯის შესწორება, როდესაც ერთევა  $OZ$  გასწვრივ მიმართული სუსტი მაგნიტური ველი.

6.28. აჩვენეთ, რომ ძირითადი მდგომარეობის ენერჯის მეორე რიგის შესწორება ყოველთვის უარყოფითი სიდიდეა.

6.29. სისტემის შეშფოთება იმაში მდგომარეობს, რომ ერთგანზომილებიანი  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ი ორმოს ფსკერი  $V_0$  მუდმივით აინია მხოლოდ  $x \in (0, a/2)$  ინტერვალში. იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველი შესწორებები ენერჯიასა და ტალღურ ფუნქციაში.

6.30. იპოვეთ ენერჯის პირველი შესწორება ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს  $x_0$  სიგანის და უსასრულო სიმაღლის ერთგანზომილებიან პოტენციურ ორმოში, თუ შეშფოთების ენერჯიას აქვს სახე:

$$\hat{V} = -C, \text{ როცა } 0 \leq x \leq x_0/2;$$

$$\hat{V} = C, \text{ როცა } x_0/2 < x \leq x_0,$$

სადაც  $C$  მუდმივია.

6.31. განიხილეთ კვანტური ქანქარა, რომლის ჰამილტონიანია:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \lambda \cos \varphi,$$

სადაც პოტენციურ ი ენერგია  $V = -\lambda \cos \varphi$ , განიხილება როგორც შეშფოთება. იპოვეთ ამ სისტემისთვის შეშფოთების თეორიის პირველი და მეორე რიგის შესწორებები ენერგიისათვის.

6.32. ერთგანზომილებიანი  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში მოთავსებულ ნაწილაკზე მოქმედებს შეშფოთება  $V = -qx$ . იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორებები ენერგიისა და ტალღური ფუნქციისათვის.

6.33.  $|V_{mn}| \ll |E_n^{(0)} - E_m^{(0)}|$  თანაფარდობა წარმოადგენს შეშფოთების თეორიის გამოყენების აუცილებელ პირობას. მაგალითის სახით აჩვენეთ, რომ  $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda x^3$  ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის ეს პირობა არ არის საკმარისი.

6.34. წყალბადის ატომში ბირთვის მუხტის ერთი პროტონით გაზრდისას, შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ენერგიის ცვლილება.

6.35.\* როგორ შეიცვლება წყალბადის ატომის პირველი აგზნებული დონის ენერგია, თუ პროტონს განვიხილავთ არა როგორც წერტილს, არამედ ჩავთვლით მას მცირე  $b = 5 \cdot 10^{-13}$  სმ რადიუსის მქონე თანაბრად დამუხტულ სფეროდ?

**მითითება:** შეშფოთების ოპერატორად განიხილეთ ოპერატორი:

$$\hat{V}(r) = \begin{cases} e^2 \left( 1/r - 3/2b + r^2/2b^3 \right), & r < b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

სადაც  $b \ll a$  ( $a$  ბორის რადიუსია).

6.36. ნაწილაკი იმყოფება ორგანზომილებიან სიმეტრიულ უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში. ამასთანავე, ნაწილაკზე მოქმედებს მცირე შეშფოთებაც  $W = Cxy$ , სადაც  $C$  მუდმივაა. იპოვეთ ენერგიის შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება.

6.37.\* ნაწილაკის ჰამილტონიანს შემდეგი სახე აქვს:

$$H = \begin{cases} \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 r^2}{2}; & 0 \leq r \leq a \\ \frac{p^2}{2m}; & r > a \end{cases}$$

სადაც  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის შეშფოთების თეორიის პირველი და მეორე რიგის შესწორებები.

**მიითეთვა:** შეშფოთების ოპერატორად განიხილეთ ოპერატორი:

$$V = \begin{cases} 0; & 0 \leq r \leq a \\ -m\omega^2 r^2 / 2; & r > a \end{cases}$$

6.38.  $m$  მასის და  $E = \frac{3\pi^2 \hbar^2}{ma^2}$  ენერჯიის მქონე ნაწილაკი იმყოფება სამგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში. მასზე  $z$  მიმართულებით მოქმედებს სუსტი ელექტრული ველი  $W = e\mathcal{E}$ . იპოვეთ ენერჯიის შეშფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება.

## 6.2. ვარიაციული მეთოდი

6.39. ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ

$$U(x) = \begin{cases} F_0 x; & x \geq 0 \\ \infty; & x < 0 \end{cases}$$

ველში მოძრავი ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერჯია. საცდელ ფუნქცი-

ებად აიღეთ: ა)  $\Psi = Axe^{-\alpha x}$ ; ბ)  $\Psi = Bxe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ .

6.40. ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერჯია, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ველში:

$$U(x) = -\alpha \delta(x)$$

საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა)  $\Psi(x) = A \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1}$ ; ბ)  $\Psi(x) = B \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-2}$ ,

სადაც  $a$  ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.41. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ნაწილაკის პირველი აგზნებული დონის ენერჯია, რომელიც მოძრაობს წრფივი ოსცილატორის ველში. საცდელ

ფუნქციად აიღეთ:  $\Psi = Axe^{-\alpha|x|}$ , სადაც  $\alpha$  ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.42. იპოვეთ ერთგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის და  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში მოძრავი ნაწილაკის ძირითადი დონის ენერჯია. საცდელ ფუნქცი-

ებად აიღეთ: ა)  $\Psi(x) = Ax(x-a)$ ; ბ)  $\Psi(x) = \sin^2 \frac{\pi x}{a}$ ; გ)  $\Psi(x) = C \left( \frac{a}{2} - \left| x - \frac{a}{2} \right| \right)$ .

შედეგი შეადარეთ ზუსტ შედეგს. ახსენით, ყველაზე კარგ თანხვედრას რატომ იძლევა ა) ფუნქცია.

6.43. იპოვეთ ერთგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის და  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში მოძრავი ნაწილაკის პირველი აგზნებული დონის ენერგეტიკა. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ:  $\Psi = Bx(a/2 - x)(a - x)$ . შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.44.\* ერთნაირი  $m$  მასის ორი ნაწილაკი იმყოფება ერთგანზომილებიან უსასრულო სიმაღლის და  $a$  სიგანის პოტენციურ ორმოში და ერთმანეთთან ურთიერთქმედებენ, როგორც ორი შეუღწევადი ნერტილი, ანუ  $\Psi(x_1, x_2) = 0$ , როცა  $x_1 = x_2$ . იპოვეთ ძირითადი დონის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ უმარტივესი პოლინომები, რომლებიც აკმაყოფილებენ ამოცანის პირობებს.

**მითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ:

$$\Psi = Ax(x_1 - x_2)(a - x_2), \quad 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq a.$$

6.45.\* ვარიაციული მეთოდის საშუალებით (საცდელ ფუნქციად აიღეთ  $\Psi(r) = Ce^{-\beta r}$ ;  $\beta > 0$  ვარიაციული პარამეტრია) მიიღეთ ცენტრალურ  $U(r)$  ველში (ამასთან,  $U(r) \rightarrow 0$ , როცა  $r \rightarrow \infty$ ) ბმული დონის არსებობის საკმარისი პირობა.

**მითითება:** დათვალეთ ენერგიის საშუალო მნიშვნელობა და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ძირითადი დონის ენერგია ნაკლებია ან უდრის საშუალო მნიშვნელობას.

6.46.\* ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ძირითადი მდგომარეობის ენერგიის მიახლოებითი მნიშვნელობა. საც-

დელ ფუნქციებად აიღეთ: ა)  $\Psi(x) = A \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1}$ ; ბ)  $\Psi(x) = B \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-2}$ , სა-

დაც  $a$  ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

**მითითება:** ინტეგრალების გამოთვლებისას გამოიყენეთ დამატების (A.10) ფორმულა.

6.47. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ველში:

$$U(x) = \begin{cases} kx, & x > 0; k > 0 \\ \infty, & x < 0. \end{cases}$$

ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა)  $\Psi(x) = Axe^{-\alpha x}$ ; ბ)  $\Psi(x) = Bxe^{-\frac{\alpha x^2}{2}}$ , სადაც  $\alpha$  ვარიაციული პარამეტრია. შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.48. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ველში:

$$U_0(x) = \begin{cases} \infty; & x < 0 \\ -\alpha \delta(x - a); & x > 0. \end{cases}$$

ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ პარამეტრების ის მნიშვნელობები, რომელთათვისაც ამ პოტენციალს გააჩნია ბმული მდგომარეობები. საცდელ

ფუნქციებად აიღეთ ( $x > 0$ ): ა)  $\Psi(x) = Axe^{-\mu x}$ ; ბ)  $\Psi(x) = Bxe^{-\frac{\mu x^2}{2}}$ . შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.49. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ორგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის პოტენციური  $a$  სიგანის ორმოში მოძრავი ნაწილაკის ძირითადი დონის ენერგია. საცდელ ფუნქციებად აიღეთ: ა)  $\Psi_0(\rho) = A(a - \rho)$ ; ბ)

$\Psi_0(\rho) = B \cos \frac{\pi \rho}{2a}$ . შედეგი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

6.50. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ორგანზომილებიანი უსასრულო სიმაღლის პოტენციური  $a$  სიგანის ორმოში მოძრავი ნაწილაკის პირველი აგზნებული  $E_{n\rho=0, |m|=1}$  დონის ენერგია. საცდელ რადიალურ ფუნქციებად აიღეთ მეორე რიგის პოლინომი, რომელიც  $\rho = 0$  და  $\rho = a$  წერტილებში აკმაყოფილებს აუცილებელ სასაზღვრო პირობებს.

6.51. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ორგანზომილებიანი ბრტყელი ოსცილატორის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. საცდელ ფუნქციად აიღეთ  $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha \rho}$ , სადაც  $\alpha$  ვარიაციული პარამეტრია.

6.52. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია კულონურ  $U = -\alpha/r$  ველში. საცდელ ფუნქციად აიღეთ:

ა)  $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha^2 r^2}$ ; ბ)  $\Psi(r) = \begin{cases} C(a-r), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$ , სადაც  $\alpha$  და  $a$  ვარიაციული

პარამეტრებია.

6.53.\* ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ წყალბადის ატომის მიახლოებითი ენერგია და ტალღური ფუნქციები  $2s$  მდგომარეობაში.

**მიითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ:  $\psi_{2s} = A \left( 1 + \frac{\gamma r}{a} \right) e^{-\frac{b}{a} r}$ , სადაც  $a$  ბორის

პირველი რადიუსია,  $A$  ნორმირების მუდმივაა, ხოლო  $b$  და  $\gamma$  ვარიაციული პარამეტრებია.

6.54. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია ოსცილატორისათვის  $U = \frac{kr^2}{2}$ . საცდელ ფუნქციად აიღეთ:

ა)  $\Psi_0(\rho) = Ce^{-\alpha\rho}$ ; ბ)  $\Psi(r) = \begin{cases} C(a-r), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases}$ , სადაც  $\alpha$  და  $a$  ვარიაციული პარამეტრებია.

რამეტრებია.

6.55. ვარიაციული მეთოდის საშუალებით იპოვეთ ნაწილაკის ძირითადი მდგომარეობის ენერგია სამგანზომილებიანი ოსცილატორისათვის. საცდელ ფუნქციად აიღეთ:  $\varphi = A(1 + \alpha r)e^{-\alpha r}$ , სადაც  $\alpha$  და  $A$  ვარიაციული პარამეტრებია.

6.56.\* განიხილეთ ერთგანზომილებიანი მიზიდვის პოტენციალი, ისეთი, რომ  $V(x) < 0$  ყველა  $x$ -თვის. ვარიაციული პრინციპის გამოყენებით აჩვენეთ, რომ ამ პოტენციალს გააჩნია მინიმუმ ერთი დონე.

**მითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ:  $\psi = \sqrt[4]{\frac{2a}{\pi}} e^{-ax^2}$ .

6.57.\* განიხილეთ ნაწილაკი, რომელიც მოძრაობს ერთგანზომილებიან  $V(x) = \lambda x^4$  ველში. გამოიყენეთ ვარიაციული მეთოდი და იპოვეთ ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. შეადარეთ შედეგი ზუსტ ამონახსნს  $E_0 = 1,06 \frac{\hbar^2}{2m} k^{\frac{1}{3}}$ , სადაც  $k = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}$ .

**მითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ:  $\psi = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\alpha x^2}$ .

6.58. დაამტკიცეთ ვარიაციული პრინციპის შემდეგი დებულება: თუ  $\langle \psi | \psi_g \rangle = 0$ , მაშინ  $\langle H \rangle \geq E_f$ , სადაც  $E_f$  არის პირველი ადგზნებული დონის ენერგია.

6.59. გამოიყენეთ ვარიაციული პრინციპი იმის დასამტკიცებლად, რომ შემფოთების თეორიის პირველი რიგის შესწორება (არაგადაგვარებული სპექტრის შემთხვევაში), მეტია ან ტოლი ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაზე.

6.60. გამოიყენეთ ვარიაციული პრინციპი იმის დასამტკიცებლად, რომ შემთოების თეორიის მეორე რიგის შესწორება (არაგადაგვარებული სპექტრის შემთხვევაში), ნაკლებია ან ტოლია ძირითადი მდგომარეობის ენერგიაზე.

6.61.\* თუ ფოტონს გააჩნია არანულოვანი მასა ( $m_\gamma \neq 0$ ), მაშინ კულონურ პოტენციალს ცვლის იუკავას პოტენციალი:

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\mu r}}{r},$$

სადაც  $\mu = m\gamma c / \hbar$ . ვარიაციული პრინციპის გამოყენებით იპოვეთ ამ „წყალბადის“ ატომის ბმის ენერგია. დავეუშვით,  $\mu a \ll 1$  და იპოვეთ პასუხი  $(\mu a)^2$  სიზუსტით (აქ  $a$  ბორის პირველი რადიუსია).

**მიითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ:  $\psi = \frac{1}{\sqrt{\pi b^3}} e^{-\frac{r}{b}}$  (ვაკეთებთ  $b \rightarrow a$  შეცვლას წყალბადის ატომთან შედარებით).

### 6.3. შეშფოთების არასტაციონარული თეორია

6.62.  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის ორმოში მოთავსებულ ნაწილაკზე, რომელიც ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა უსასრულოდ წარსულში ( $t \rightarrow -\infty$ ), მოქმედებას იწყებს სუსტი ერთგვაროვანი ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება:

ა)  $V(x, t) = -xF_0 \exp(-t^2 / \tau^2)$ ;

ბ)  $V(x, t) = -xF_0 \exp(-|t| / \tau)$ .

შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები?

6.63. დამუხტულ ნრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება:

ა)  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)$ ;

ბ)  $\mathcal{E}(x, t) = \mathcal{E}_0 \exp(-|t| / \tau)$ .

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ( $t \rightarrow -\infty$ ) ოსცილატორი იმყოფებოდა ნებისმიერ  $n$  სტაციონარულ მდგომარეობაში და შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის აღგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები?

6.64. დამუხტულ ნრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება:

ა)  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left(1 + \frac{t^2}{\tau^2}\right)^{-1}$  ;    ბ)  $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right) \cos \omega_0 t$ .

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ( $t \rightarrow -\infty$ ) ოსცილატორი იმყოფებოდა ნებისმიერ  $n$  სტაციონარულ მდგომარეობაში და შეშფოთების თეორიის პირველ რი-

გში იპოვეთ ნაწილაკის ალგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები?

6.65. დამუხტულ წრფივ ოსცილატორზე მოქმედებს ერთგვაროვანი ელექტრული ველი, რომელიც დროში შემდეგნაირად იცვლება:

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \left( \frac{1}{\pi} \arctan \frac{t}{\tau} + \frac{1}{2} \right).$$

ჩათვალეთ, რომ ველის ჩართვამდე ( $t \rightarrow -\infty$ ) ოსცილატორი იმყოფებოდა ნებისმიერ  $n$  სტაციონარულ მდგომარეობაში და შემფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ ნაწილაკის ალგზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ). რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები?

6.66.  $\vec{d}$  დიპოლური მომენტის მქონე ბრტყელ როტატორზე მოქმედებას იწყებს ერთგვაროვანი, დროში ცვალებადი ელექტრული ველი  $\mathcal{E}(t) = f(t)\mathcal{E}_0$ . ველის ჩართვამდე როტატორს გააჩნდა იმპულსის მომენტის,  $m$ -ის განსაზღვრული მნიშვნელობა. შემფოთების თეორიის პირველ რიგში უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ) იპოვეთ როტატორის ენერჯიის პოვნის ალბათობები.

6.67.\* იპოვეთ სისტემის სანყისი ( $t \rightarrow -\infty$ ) დისკრეტული სპექტრის  $n$  მდგომარეობიდან საბოლოო ( $t \rightarrow \infty$ ) მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა არასტაციონარული შემფოთების თეორიის მეორე რიგში. ჩათვალეთ, რომ შემფოთება  $t \rightarrow \pm\infty$  დროს ნულის ტოლია.

**მითითება:** გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი თეორიული ნაწილის (6.16)-(6.21) ფორმულები.

6.68. თუ ისარგებლებთ ამ თავის შესავალი თეორიული ნაწილის (6.20) ფორმულით, მაშინ ალბათობა  $W_n = |a_{nm}(+\infty)|^2$  იმისა, რომ სისტემა იმავე სანყის  $n$  მდგომარეობაში დარჩეს, ერთზე მეტი გამოდის  $W_n > 1$ , რაც ეწინააღმდეგება ნორმის დროში შენახვას. ახსენით წარმოქმნილი პარადოქსი.

6.69.\*  $I$  ინერჯიის მომენტის მქონე ბრტყელი როტატორი ბრუნავს  $xy$  სიბრტყეში და გააჩნია  $q$  მუხტი  $a$  მანძილზე  $z$  ბრუნვის ღერძიდან. უსასრულო წარსულში ( $t \rightarrow -\infty$ ) როტატორი ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა.  $z$  ღერძის პარალელურად  $b \gg a$  მანძილზე როტატორს  $v$  სიჩქარით ჩაუფრინა  $Q$  მუხტის მქონე ნერტილოვანმა ნაწილაკმა, ისე, რომ ეს ნაწილაკი  $t = 0$  მომენტში  $z = 0$  სიბრტყეს კვეთს. იპოვეთ უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ) როტატორის ენერჯიების პოვნის ალბათობები. მიუთითეთ, რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

**მითითება:** ჩათვალეთ, რომ მუხტი მოძრაობს  $z = b$  წრფის გასწვრივ. მაშინ მისი როტატორთან ელექტროსტატიკური ურთიერთქმედების ენერჯია იქნება



$qQ(b^2 + a^2 - 2ab \cos \varphi + v^2 t^2)^{-1/2}$ . გაშალეთ ეს გამოსახულება  $a/b$  მცირე პარამეტრის მიხედვით და მიიღეთ შემოფოთების ოპერატორის გამოსახულება.

6.70.\* მუხტის მქონე ორგანზომილებიანი ჰარმონიული ოსცილატორი  $\omega$  სიხშირით ირხევა  $xy$  სიბრტყეში  $x = y = 0$  წერტილის მახლობლად.  $z$  ღერძის პარალელურად  $b$  მანძილზე ოსცილატორს  $v$  სიჩქარით ჩაუფრინა  $Q$  მუხტის მქონე წერტილოვანმა ნაწილაკმა, ისე, რომ ეს ნაწილაკი  $t = 0$  მომენტში  $xy$  სიბრტყეს კვეთს. უსასრულო წარსულში ( $t \rightarrow -\infty$ ) ოსცილატორი ძირითად მდგომარეობაში იმყოფებოდა. იპოვეთ უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow \infty$ ) ოსცილატორის ენერგიების პოვნის ალბათობები იმ დაშვებით, რომ  $b \gg \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ . მიუთითეთ, რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

**მიუთითება:** ამოხსნა წინა 6.69 ამოცანის ანალოგიურია.

6.71. განიხილეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორი  $\omega_0$  სიხშირით და  $q$  მუხტით.  $t = 0$  მომენტამდე ნაწილაკი იმყოფებოდა ძირითად მდგომარეობაში. ოსცილატორზე  $\tau$  დროის განმავლობაში მოქმედებას იწყებს შემოფოთება – სუსტი ელექტრული ველი

$$W(t) = \begin{cases} -q\mathcal{E}x; & 0 \leq t \leq \tau \\ 0; & t < 0 : t > \tau \end{cases},$$

სადაც  $\mathcal{E}$  ველის დაძაბულობაა. შემოფოთების თეორიის პირველ რიგში იპოვეთ  $n = 1$  მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა.

6.72. სისტემას გააჩნია დისკრეტული  $E_n$  სპექტრი  $\Psi_n$  ტალღური ფუნქციებით. მასზე  $t = -\infty$  მომენტში (როდესაც შეუშოთებელი სისტემა  $\Psi_0$  ძირითად მდგომარეობაში იმყოფება) მოქმედებას იწყებს შემდეგი შემოფოთება:

$$\hat{V} = V_0(r) \frac{e^{-\frac{r^2}{\tau^2}}}{\tau\sqrt{\pi}}.$$

როგორია იმის ალბათობა, რომ სისტემა  $t = \infty$ -თვის გადავა  $\Psi_k; k > 0$  მდგომარეობაში?

6.73. განიხილეთ ერთგანზომილებიანი  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციური ორმო.  $t = 0$  მომენტში  $a/4 < x < 3/4$  ინტერვალში მოქმედებას იწყებს მუდმივი  $V_0$  შემოფოთება. როგორია იმის ალბათობა, რომ  $t = 0$  მომენტში  $\Psi_3$  მდგომარეობაში მყოფი სისტემა დროის  $t$  მომენტში  $\Psi_1$  მდგომარეობაში აღმოჩნდება?

## თავი 7. კვანძოვანი მიახლოება

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

კვანძოვანი მიახლოებაში შრედინგერის ერთგანზომილებიანი განტოლების ორი დამოუკიდებელი ამონახსნია:

$$\Psi_E^\pm(x) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \exp\left\{\pm \frac{i}{\hbar} \int_c^x p(x) dx\right\}; \quad (7.1)$$

$$p = \sqrt{2m(E - U(x))}. \quad (7.2)$$

კვანძოვანი მიახლოების გამოყენების პირობა ასე გამოიყურება:

$$\left| \frac{d\lambda}{dx} \right| \equiv \hbar \left| \frac{d(1/p)}{dx} \right| = m\hbar \left| \frac{U'(x)}{p^3(x)} \right| \ll 1 \quad (7.3)$$

ბორ-ზომერფელდის დაკვანძვის პირობაა:

$$\frac{1}{\hbar} \int_a^b \sqrt{2m(E_n - U(x))} dx = \pi \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.4)$$

სადაც  $a$  და  $b$  ე.წ. მობრუნების წერტილებია ანუ ის წერტილებია, სადაც  $U(x) = E_n$ .

(7.4) ფორმულის  $n$ -ით განარმოებით მივიღებთ მანძილს მეზობელ დონეებს შორის:

$$\delta E_n \equiv E_{n+1} - E_n \approx \frac{\partial E_n}{\partial n} = \hbar \omega(E_n), \quad (7.5)$$

სადაც  $\omega(E_n) = \frac{2\pi}{T(E_n)}$  კლასიკური  $E_n$  ენერჯიის კლასიკური ნაწილაკის მოძრაობის სიხშირეა,  $T$  კი მისი პერიოდი.

ბმული მდგომარეობის ტალღური ფუნქციისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ შემდეგი ფორმულა:

$$\Psi_n(x) \approx \begin{cases} \frac{C_n}{\sqrt{p(x)}} \sin\left(\frac{1}{\hbar} \int_a^x p(x) dx + \frac{\pi}{4}\right); & a < x < b \\ 0; & x < a, x > b \end{cases} \quad (7.6)$$

რაც იმას ნიშნავს, რომ კლასიკურად დაუშვებელ არეში ნაწილაკს შეღწევა არ შეუძლია (მისი ტალღური ფუნქცია ექსპონენციალურად ეცემა). ტალღური ფუნქციის ერთზე ნორმირების პირობიდან კი მივიღებთ:

$$C_n^2 = \frac{2m\omega(E_n)}{\pi}, \quad (7.7)$$

ხოლო რხევის პერიოდისათვის გვექნება შემდეგი ფორმულა:

$$T(E_n) = \frac{2\pi}{\omega(E_n)} = 2m \int_a^b \frac{dx}{p(x, E_n)}. \quad (7.8)$$

კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში ბარიერში გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ფორმულით მოიცემა:

$$D(E) = \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_a^b |p(x, E) dx| \right\}. \quad (7.9)$$

## 7.1. ენერგეტიკული სპექტრის დაკვანტვა

7.1. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ ჰარმონიული ოსცილატორის ენერგეტიკული რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები? პასუხი შეადარეთ ზუსტ ამონახსნს.

7.2. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ შემდეგი პოტენციალის

$$U(x) = -\frac{U_0}{ch^2 \frac{x}{a}}$$

ენერგეტიკული.

7.3. ნაწილაკი მოძრაობს ველში:

$$U(x) = U_0 \left| \frac{x}{a} \right|^\nu; \quad U_0 > 0, \nu > 0.$$

გამოიკვლიეთ კვაზიკლასიკურ შემთხვევაში ნებისმიერი დიდი  $n$ -ისთვის როგორია დამოკიდებული ენერჯის დონეებს შორის მანძილი  $\nu$  პარამეტრზე. როგორია დისკრეტული სპექტრის სიმკვრივე?

7.4. ნაწილაკის პოტენციურ ენერჯიას  $x_0$  წერტილის მახლობლად შემდეგი სახე აქვს:

$$U(x) \approx \pm \alpha |x - x_0|^{-\nu}; \quad \nu > 2.$$

შრედინგერის განტოლების ამონახსნს,  $x_0$  წერტილის მახლობლად,  $\nu$  პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის აქვს კვაზიკლასიკური სახე? აქვს თუ არა ამონახსნს კვაზიკლასიკური სახე  $\nu = 2$ -თვის?

7.5. ნაწილაკი მოძრაობს შემდეგ ცენტრალურ ველში:

$$U(r) = -\alpha r^{-\nu}; \quad \alpha > 0, \nu > 0.$$

გამოარკვეით, სივრცის რომელ არეში შრედინგერის განტოლების ამონახსნს ( $s$  მდგომარეობაში  $E = 0$  ენერგიით) აქვს კვაზიკლასიკური სახე.

7.6.\* კვაზიკლასიკური მიახლოების გამოყენებით იპოვეთ დისკრეტული სპექტრის ზედა დონეები (ანუ დონეები, რომელთათვისაც  $E_n \rightarrow \infty$ ), ნაწილაკისათვის, რომელიც მოძრაობს შემდეგ ველში:

$$U(x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{x^2}, & x > a; \quad a > 0 \\ \infty, & x < a. \end{cases}$$

მიუთითეთ, თუ რა პირობებშია სამართლიანი მიღებული შედეგები.

**მითითება:** ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობის გამოყენებისას ინტეგრალ-

ში გააკეთეთ ჩასმა 
$$z = \sqrt{1 - \frac{|E_n| x^2}{\alpha}}.$$

7.7.\* ნაწილაკი იმყოფება შემდეგ პოტენციურ ველში:

$$U(x) = U_0 \left| \frac{x}{a} \right|^\nu; \quad U_0 > 0, \nu > 0.$$

გამოარკვეით  $\nu$  პარამეტრის რა მნიშვნელობებისათვის შეიძლება გამოვიყენოთ კვაზიკლასიკური მიდგომის სტანდარტული ფორმულები: ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვა და მობრუნების წერტილების მახლობლად კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციების შეკერვა.

**მითითება:** გაშალეთ პოტენციული  $x_0$  წერტილის მახლობლად და შემოიფარგლეთ წრფივი ნევრით.

7.8. ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობიდან მიიღეთ ნაწილაკის დონეების წანაცვლების ფორმულა, როდესაც მცირე  $\delta U(x)$  სიდიდით იცვლება პოტენციური ენერგია.

7.9.\* მიახლოებით განსაზღვრეთ ნაწილაკის დისკრეტული მდგომარეობების რიცხვი მისი  $U(\vec{r})$  ველში მოძრაობისას, რომელიც კვაზიკლასიკურობის მოთხოვნას აკმაყოფილებს.

**მითითება:** მდგომარეობათა რიცხვი, რომელიც „მოდის“ ფაზურ მოცულობაზე, რომელიც შეესაბამება იმპულსებს  $0 \leq p \leq p_{\max}$  და ნაწილაკის კოორდინატებს

$dV$  მოცულობაში, ტოლია 
$$\frac{4\pi/3 p_{\max}^3 dV}{(2\pi\hbar)^3}; \quad p_{\max} = \sqrt{-2mU(\vec{r})}.$$

7.10.\* მიახლოებით განსაზღვრეთ ნაწილაკის დისკრეტული მდგომარეობების რიცხვი მისი  $U(r)$  ცენტრალურ ველში მოძრაობისას, რომელიც კვაზიკლასიკურიობის მოთხოვნას აკმაყოფილებს.

**მითითება:** მდგომარეობების რიცხვი მოცემული  $M$  ორბიტალური მომენტისათვის ემთხვევა ერთგანზომილებიანი მოძრაობის მდგომარეობათა რიცხვს

$$U = V(r) + \frac{M^2}{2mr^2} \text{ ეფექტური პოტენციალით.}$$

7.11.\* სფერული სიმეტრიის მქონე პოტენციალებისათვის  $l = 0$  მდგომარეობაში კვაზიკლასიკური დაკვანტვის პირობა ასე შეიძლება ჩაინეროს:

$$\int_0^{r_0} p(r) dr = (n - 1/4)\pi\hbar,$$

სადაც  $r_0$  მობრუნების წერტილია. გამოიყენეთ ეს ფორმულა ნაწილაკის ენერჯიების საპოვნელად, რომელიც მოძრაობს ლოგარითმულ ველში:

$$V(r) = V_0 \ln \frac{r}{a}.$$

აჩვენეთ, რომ დონეებს შორის სხვაობა არ არის დამოკიდებული მასაზე.

**მითითება:** ინტეგრალის დათვლისას გამოიყენეთ ჩასმა  $x = \ln \frac{r_0}{r}$ .

## 7.2. კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციები, ალბათობები და საშუალოები. პოტენციურ ბარიერებში გასვლა

7.12. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $F(x)$  ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი საშუალო მნიშვნელობა დისკრეტული სპექტრის ნებისმიერ  $n$  სტაციონარულ მდგომარეობაში. საილუსტრაციოდ დათვალეთ  $\langle x^2 \rangle$  და  $\langle x^4 \rangle$  წრფივი ოსცილატორისათვის.

7.13. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ  $F(p)$  ფიზიკური სიდიდის შესაბამისი საშუალო მნიშვნელობა დისკრეტული სპექტრის ნებისმიერ  $n$  სტაციონარულ მდგომარეობაში. საილუსტრაციოდ დათვალეთ  $\langle p^2 \rangle$  და  $\langle p^4 \rangle$  წრფივი ოსცილატორისათვის.

7.14. იპოვეთ ტალღური ფუნქციის ყოფაქცევა კოორდინატთა სათავეში, თუ  $r \rightarrow 0$ -თვის ველი უსასრულობაში მიისწრაფვის შემდეგი კანონით  $\pm \frac{\alpha}{r^s}$ , სადაც  $s > 2$ .

7.15. მიიღეთ ბორ-ზომერფელდის დაკვანტვის პირობა, როდესაც ნაწილაკის მოძრაობა ერთი მხრიდან შემოსაზღვრულია შეუღწევადი კედლით.

7.16. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში გამოთვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი პარაბოლური ბარიერისათვის:

$$U(x) = \begin{cases} U_0 \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right), & |x| < a, \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

7.17. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში გამოთვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0 (1 - x/a), & x > 0 \end{cases}$$

7.18. კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში გამოთვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ U_0 \exp(-x/a), & x > 0 \end{cases}$$

7.19.\* კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში გამოთვალეთ გასვლის კოეფიციენტი შემდეგი ბარიერისათვის:

$$U(x) = \frac{U_0}{ch^2 \frac{x}{a}}$$

**მიითითება:** ინტეგრალის დათვლისას გამოიყენეთ  $sh(x/a) = \eta \sin t$  ჩასმა, სადაც

$$\eta = \sqrt{\frac{U_0}{E} - 1}$$

7.20. იპოვეთ გასვლის კოეფიციენტის კვაზიკლასიკურ გამოსახულებაში ექსპონენტის წინ მდგომი მამრავლი შემდეგი ბარიერისათვის:

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \tilde{U}(x), & x > 0 \end{cases}$$

იგულისხმება, რომ  $x > 0$ -თვის სრულდება კვაზიკლასიკურობის გამოყენების პირობა.

7.21. 7.17 ამოცანის ბარიერში გასვლის კოეფიციენტის გამოსახულებაში წინა 7.20 ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით შეიტანეთ შესწორება ექსპონენტის წინ მდგომ მამრავლში. იპოვეთ კვაზიკლასიკურობის გამოყენების პირობა.

7.22.\* კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში იპოვეთ ნაწილაკის (ნულოვანი ორბიტალური მომენტით) გამოსვლის ალბათობა შემდეგი ცენტრალურ-სიმეტრიული ორმოდან:

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < r_0 \\ \frac{\alpha}{r}, & r > r_0; \alpha > 0 \end{cases}$$

**მითითება:** ცენტრალური სიმეტრიის ამოცანა დაიყვანება ერთგანზომილებიან შემთხვევაზე, რის გამოც შეიძლება გამოვიყენოთ წინა ამოცანებში მიღებული შედეგები.

7.23.\* კვაზიკლასიკურ მიახლოებაში (ექსპონენციალური მამრავლის სიზუსტით) იპოვეთ  $m$  მასისა და  $E$  ენერგიის ნაწილაკის პოტენციურ ბარიერში

$$U(x) = U_0 e^{-\frac{|x|}{x_0}}; U_0 > 0; x_0 > 0$$

გასვლის კოეფიციენტი.

**მითითება:** ინტეგრალის დათვლისას გააკეთეთ ჩასმა  $\sqrt{\frac{U_0}{E} e^{-\frac{x}{x_0}} - 1} = y$ .

## თავი 8. სპინი

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

- 1)  $s$ -სპინიანი ნაწილაკის ტალღურ ფუნქციას  $2s+1$  კომპონენტი აქვს და  $s_z$  წარმოდგენაში ერთი სვეტის სახით მოიციემა:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi(\vec{r}, s) \\ \psi(\vec{r}, s-1) \\ \psi(\vec{r}, s-2) \\ \dots \\ \psi(\vec{r}, -s) \end{pmatrix}, \quad (8.1)$$

სადაც  $\psi(\vec{r}, \sigma)$  წარმოადგენს მდგომარეობის ამპლიტუდას, რომელშიც სპინის პროექცია  $z$  ღერძზე  $\sigma$ -ს ტოლია, ამასთან,  $\sigma = s, s-1, s-2, \dots, -s$ . ამ წარმოდგენაში სპინის ვექტორის კომპონენტების ოპერატორი გამოისახება  $\hat{s}_x, \hat{s}_y, \hat{s}_z$  მატრიცებით.

$s = 1/2$  სპინისათვის ეს  $\hat{s} = \vec{\sigma}/2$  ოპერატორები გამოისახებიან პაულის მატრიცებით:

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

პაულის მატრიცებს შემდეგი თვისებები აქვთ:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \hat{\sigma}_y^2 = \hat{\sigma}_z^2 = 1; \quad (8.3)$$

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y = i \hat{\sigma}_z; \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z = -i \hat{\sigma}_y; \quad \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z = i \hat{\sigma}_x, \quad (8.4)$$

და ისინი ანტიკომუტირებენ ერთმანეთთან:

$$\hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_y + \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_x = 0; \quad \hat{\sigma}_x \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_x = 0; \quad \hat{\sigma}_y \hat{\sigma}_z + \hat{\sigma}_z \hat{\sigma}_y = 0. \quad (8.5)$$

მოკლედ, (8.3) – (8.5) თანაფარდობები ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ:

$$\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \hat{\sigma}_l, \quad (8.6)$$

სადაც  $i = 1, 2, 3$  და  $\hat{\sigma}_1 \equiv \hat{\sigma}_x; \hat{\sigma}_2 \equiv \hat{\sigma}_y; \hat{\sigma}_3 \equiv \hat{\sigma}_z$ .

$s = 1/2$  სპინისათვის სპინური ფუნქციის ჩასაწერად ხშირად გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

$$\psi_1 \equiv \psi(\sigma = 1/2); \quad \psi_2 \equiv \psi(\sigma = -1/2). \quad (8.7)$$



ასე რომ, ამ შემთხვევაში (8.1) ფუნქცია ასე ჩაინერება:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad (8.8)$$

ხოლო სკალარულ ნამრავლს სპინურ სივრცეში შემდეგი სახე აქვს:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle \equiv \Phi \cdot \Psi \equiv \phi_1 \psi_1 + \phi_2 \psi_2. \quad (8.9)$$

8.1.  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკისათვის იპოვეთ საკუთარი მნიშვნელობები და ფუნქციები  $\hat{s}_x, \hat{s}_y$  და  $\hat{s}_z$  ოპერატორებისათვის.

8.2. შეამოწმეთ, რომ  $[s^2, s_z] = 0$ , სადაც  $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$ .

8.3. ისარგებლეთ პაულის მატრიცების ცხადი სახით და შეამოწმეთ შემდეგი თანაფარდობების სამართლიანობა:

$$a) [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z; \quad b) \hat{s}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2, \quad \hat{\sigma}^2 = 3I$$

8.4. დაამტკიცეთ შემდეგი ტოლობის სამართლიანობა:

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + i\sigma(\vec{A} \times \vec{B}),$$

სადაც  $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  პაულის მატრიცებია,  $\vec{A}$  და  $\vec{B}$  კი ვექტორული ოპერატორებია, რომლებიც კომუტირებენ  $\sigma$  მატრიცებთან, მაგრამ შესაძლოა ერთმანეთთან არ კომუტირებდნენ.

8.5. იპოვეთ  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორით განსაზღვრულ ნებისმიერ მიმართულებაზე სპინის  $\hat{s}_n$  ოპერატორის სახე.

8.6. იპოვეთ  $\hat{f} = a + \vec{b} \cdot \hat{\sigma}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები, სადაც  $a$  რიცხვია,  $\vec{b}$  ჩვეულებრივი ვექტორია,  $\hat{\sigma}$  – პაულის მატრიცები.

8.7. შეიძლება თუ არა ელექტრონის სპინის პროექციების კვადრატებს  $x, y$  და  $z$  ღერძებზე ერთდროულად ჰქონდეთ გარკვეული მნიშვნელობები?

8.8. ნებისმიერი წრფივი ოპერატორი  $\hat{L}$ , რომელიც მოქმედებს  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკის სპინური ცვლადების სივრცეში, მეორე რანგის მატრიცას წარმოადგენს. რა შეზღუდვებს ადებს  $\hat{L}$  ოპერატორის ერმიტულობა მისი მატრიცის ელემენტებს?

იპოვეთ ასეთი ერმიტული ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობები.

8.9. დარწმუნდით იმაში, რომ ოთხი მეორე რანგის მატრიცა  $\hat{1}, \hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$  ადგენს სრულ სისტემას, რისთვისაც აჩვენეთ, რომ ნებისმიერი მეორე რიგის  $\hat{A}$  მატრიცა შეიძლება გაიშალოს ამ მატრიცებად:

$$\hat{A} = a_0 \hat{1} + a_x \hat{\sigma}_x + a_y \hat{\sigma}_y + a_z \hat{\sigma}_z = a_0 + \vec{a} \vec{\sigma},$$

სადაც  $a_0 = \frac{1}{2} Sp \hat{A}$ ,  $\vec{a} = \frac{1}{2} Sp(\hat{\sigma} \hat{A})$

8.10. იპოვეთ  $|\hat{\sigma}_z\rangle, |\hat{\sigma}\rangle$  ოპერატორების ცხადი სახე

8.11. იპოვეთ  $\vec{\sigma}[\vec{\sigma}\vec{\sigma}]$  ოპერატორის ცხადი სახე

8.12. გაამარტივეთ გამოსახულება  $(\vec{a} \vec{\sigma})^n$ , სადაც  $\vec{a}$  ჩვეულებრივი ვექტორია,  $\hat{\sigma}$  პაულის მატრიცები, ხოლო  $n$  მთელი რიცხვია.

8.13.  $s = 1/2$  სპინის შემთხვევაში იპოვეთ ამწევი და დამწევი  $\hat{S}_{\pm}$  ოპერატორების სახე. რას უდრის  $\hat{S}_{\pm}^2$  ოპერატორები?

8.14. იპოვეთ პროექციული  $\hat{P}_{s_z = \pm \frac{1}{2}}$  ოპერატორი, რომელიც აპროექცირებს სპინის პროექციის განსაზღვრულ  $s_z = \pm 1/2$  მნიშვნელობებს  $z$  ღერძზე.

8.15. იპოვეთ პროექციული  $\hat{P}_{s_z = \pm \frac{1}{2}}$  ოპერატორი, რომელიც აპროექცირებს სპინის პროექციის განსაზღვრულ  $s_z = \pm 1/2$  მნიშვნელობებს ღერძზე, რომლის მიმართულეა განისაზღვრება  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორით.

8.16.  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკისათვის მიუთითეთ სპინური ტალღური  $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$  ფუნქციის გარდაქმნის კანონი კოორდინატთა ღერძების  $\phi_0$  კუთხეზე მობრუნებისას იმ ღერძის მიმართ, რომლის მიმართულეა განისაზღვრება  $\vec{n}_0$  ერთეულოვანი ვექტორით.

8.17. წინა 8.13 ამოცანის შედეგების გამოყენებით აჩვენეთ, რომ  $\Phi \cdot \Psi = \phi_1 \psi_1 + \phi_2 \psi_2$  სიდიდე არ იცვლება მითითებული გარდაქმნებისას.

8.18. აჩვენეთ, რომ კოორდინატთა ღერძების მობრუნებისას  $\vec{V} = \Phi \cdot \hat{\sigma} \Psi \left( V_i = \sum_{\alpha, \beta} \phi_{\alpha} (\hat{\sigma}_{\alpha\beta}) \psi_{\beta} \right)$  გარდაიქმნება, როგორც ვექტორი.

**მითითება:** გამოიყენეთ 8.11 ამოცანის შედეგები და  $\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_k = \delta_{ik} + i \epsilon_{ikl} \hat{\sigma}_l$  თანაფარდობა.

8.19. წარმოადგინეთ  $(\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2$  გამოსახულება იმ სახით, რომელიც შეიცავს პაულის  $\hat{\sigma}_{1,2}$  მატრიცებს არაუმეტეს პირველი ხარისხისა. ამ მატრიცების 1, 2 ინდექსები ნიშნავს, რომ ეს მატრიცები წარმოადგენენ ოპერატორებს, რომლებიც მოქმედებენ I და II ნაწილაკების სპინური ცვლადების სივრცეში.

8.20.  $s = 1/2$  -სპინიანი ნაწილაკი იმყოფება მდგომარეობაში, როცა განსაზღვრული მნიშვნელობა აქვს სპინის პროექციას  $s_z = 1/2$ . განსაზღვრეთ სპინის პროექციის შესაძლო მნიშვნელობების ალბათობები  $z'$  ღერძზე, რომელიც  $\theta$  კუთხეს ადგენს  $z$  ღერძთან.

8.21.\* იპოვეთ ცხადი სახე ოპერატორისა  $\hat{F} = F(a + \vec{b} \vec{\sigma})$ , სადაც  $F(x)$  ნებისმიერი ფუნქციაა  $x$  ცვლადისა,  $a = const$ ,  $\vec{b}$  კი ჩვეულებრივი ვექტორია.

მითითება: ჩათვალეთ, რომ  $F(a + \vec{b} \vec{\sigma}) = A + \vec{B} \vec{\sigma}$  და იპოვეთ  $A$  და  $\vec{B}$ , რისთვისაც  $z$  ღერძი მიმართეთ  $\vec{b}$  ვექტორის გასწვრივ.

8.22. წინა 8.18 ამოცანის შედეგზე დაყრდნობით იპოვეთ  $\hat{F} = \exp(i\vec{a} \vec{\sigma})$  ოპერატორის ცხადი გამოსახულება.

8.23. ანორმირეთ სპინური ტალღური ფუნქციები:

ა)  $\psi = A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  ( $a, b \neq 0$ );    ბ)  $\psi = A \begin{pmatrix} 3 \\ 4i \end{pmatrix}$

8.24.\* იპოვეთ ორი  $s = 1/2$  -სპინიანი ნაწილაკის სპინების სკალარული ნამრავლი ტრიპლეტურ და სინგლეტურ მდგომარეობებში.

**მითითება:** გამოიყენეთ ტოლობა  $\hat{s}^2 = \hat{s}_- \hat{s}_+ + \hat{s}_z + \hat{s}_z^2$ , სადაც  $\hat{s}_\pm$  8.12 ამოცანაში განხილული ამწევი და დამწევი ოპერატორებია.

8.25.  $s = 1/2$  -სპინიანი ნაწილაკისათვის გამოთვალეთ  $\hat{A} = i s_x s_y s_z$  ოპერატორის საშუალო მნიშვნელობა, როდესაც ნაწილაკის ტალღური ფუნქციაა  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## თავი 9. იზივური ნაწილაკები

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

იგივური ნაწილაკებისაგან შემდგარ სისტემის ტალღურ ფუნქციას გააჩნია გარკვეული სიმეტრია ამ ნაწილაკების გადასმის მიმართ:

$$\Psi(\dots, \xi_a, \dots, \xi_b, \dots) = \pm \Psi(\dots, \xi_b, \dots, \xi_a, \dots), \quad (9.1)$$

სადაც  $\xi_n \equiv (\vec{r}_n, \sigma_n)$  შესაბამისი ნაწილაკების სივრცული და სპინური ცვლადების ერთობლიობაა. ამასთან, ტალღური ფუნქცია სიმეტრიულია მთელსპინიანი ნაწილაკების – ბოზონების გადასმისას და ანტისიმეტრიულია ნახევარსპინიანი ნაწილაკების – ფერმიონების გადასმისას.

იგივური ნაწილაკების სისტემის შესწავლა ხელსაყრელია ე.წ. შევსებათა რიცხვების წარმოდგენაში, სადაც გამოიყენება ნაწილაკთა  $\hat{a}_i^+$  გაჩენისა და  $\hat{a}_i^-$  გაქრობის ოპერატორები.

ბოზონებისათვის ეს ოპერატორები შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_k] = [\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+] = 0; \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_k^+] \equiv \hat{a}_i \hat{a}_k^+ - \hat{a}_k^+ \hat{a}_i = \delta_{ik}, \quad (9.2)$$

ხოლო ფერმიონებისათვის გვაქვს ანტიკომუტაციური თანაფარდობანი:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_k\} = \{\hat{a}_i^+, \hat{a}_k^+\} = 0; \quad \{\hat{a}_i, \hat{a}_k^+\} \equiv \hat{a}_i \hat{a}_k^+ + \hat{a}_k^+ \hat{a}_i = \delta_{ik}. \quad (9.3)$$

ასე რომ, როგორც (9.3)-დან ჩანს, ფერმიონული ოპერატორებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი:

$$\hat{a}_i^2 = (\hat{a}_i^+)^2 = 0. \quad (9.4)$$

შემოდის აგრეთვე ნაწილაკთა რიცხვის ოპერატორის ცნებაც:

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^+ \hat{a}_i \quad (9.5)$$

ერთზე ნორმირებული მდგომარეობებისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი:

$$\hat{a}_i | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i} | \dots, n_i - 1, \dots \rangle; \quad (9.6)$$

$$\hat{a}_i^+ | \dots, n_i, \dots \rangle = \sqrt{n_i + 1} | \dots, n_i + 1, \dots \rangle. \quad (9.7)$$

ამასთან, ფერმიონებისათვის  $n_i = 0$  ან  $n_i = 1$ , ხოლო ბოზონებისათვის  $n_i = 0, 1, 2, \dots$

## 9.1. ტალღური ფუნქციების სიმეტრია

9.1.  $s$ -სპინიანი ორი ერთნაირი ნაწილაკისაგან შემდგარი სისტემისათვის იპოვეთ რამდენი განსხვავებული სპინური მდგომარეობა იქნება, რომლებიც სიმეტრიულია ან ანტისიმეტრიულია ორივე ნაწილაკის სპინური ცვლადების გადასმის მიმართ.

9.2. ცნობილია, რომ  $\varphi_{f_i}(\vec{r})$  ფუნქციები წარმოადგენენ გარეშე ველში მყოფი ნაწილაკის სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქციების სივრცულ ნაწილს. ორი ასეთი  $s$ -სპინიანი ერთნაირი, ერთმანეთთან სუსტად ურთიერთქმედი ნაწილაკი იმყოფება ამ ველში და მათი ორბიტალური მდგომარეობები ხასიათდება  $f_1$  და  $f_2$  კვანტური რიცხვებით და  $f_1 = f_2 = f$ .

იპოვეთ მდგომარეობათა საერთო რიცხვი სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით, თუ ეს ნაწილაკები: ა) ბოზონებია; ბ) ფერმიონებია.

9.3. წინა 9.2 ამოცანაში განიხილეთ შემთხვევა, როცა  $f_1 \neq f_2$ .

9.4. აჩვენეთ, რომ, თუ  $s$ -სპინიანი  $n$  იგივე ნაწილაკები სხვადასხვა ორბიტალურ  $\varphi_{f_1}(\vec{r}), \varphi_{f_2}(\vec{r}), \dots, \varphi_{f_n}(\vec{r})$  მდგომარეობებში იმყოფებიან, მაშინ მათი მდგომარეობათა საერთო რიცხვი სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით არის  $G = (2s + 1)^n$ , იმისდა მიუხედავად, თუ რა სტატისტიკას ემორჩილებიან ისინი.

9.5.  $\psi_{f_i}(\xi)$  წარმოადგენენ ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობების ერთზე ნორმირებულ ტალღურ ფუნქციებს ( $f_i$  არის სრული კრებულის კვანტური რიცხვები, ხოლო  $\xi = (\vec{r}, \sigma)$ , სადაც  $\sigma$  სპინური ცვლადია). იპოვეთ ერთზე ნორმირებული ტალღური ფუნქციები სისტემისა, რომელიც შედგება სამი იგივე ბოზონისაგან, რომელიც ხასიათდება  $f_1, f_2, f_3$  კვანტური რიცხვებით.

9.6.  $s = 1$ -სპინიანი სამი იგივე ბოზონი იმყოფება ერთნაირ ორბიტალურ მდგომარეობებში, რომლებიც  $\varphi(\vec{r})$  ტალღური ფუნქციით აღინერება. დაწერეთ სისტემის შესაძლო მდგომარეობები ნორმირებული ტალღური ფუნქციებით, სპინური თავისუფლების ხარისხების გათვალისწინებით. რამდენი ასეთი დამოუკიდებელი მდგომარეობა არსებობს? რა მნიშვნელობები შეიძლება შეიძინოს ჯამურმა სპინმა?

9.7. ერთმანეთთან სუსტად ურთიერთქმედი  $s = 0$ -სპინიანი სამი იგივე ბოზონი სტაციონარულ მდგომარეობაში იმყოფება ერთი და იგივე კვანტური  $n_r$  და  $l$  რიცხვებით, ამასთან,  $l = 1$ . რამდენი ასეთი დამოუკიდებელი მდგომარეობა არსებობს?

9.8. წინა 9.7 ამოცანის პირობებში აჩვენეთ, რომ ჯამური  $L$  მომენტი სამი ბოზონისა არ შეიძლება იყოს ნული.

9.9.  $s = 0$ -სპინიანი ორი იგივეური ბოზონი სტაციონარულ მდგომარეობაში იმყოფება, რომელიც აღინერება ნორმირებული ტალღური  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  ფუნქციით. იპოვეთ იმის ალბათობა, რომ ერთი ნაწილაკი იმყოფება  $dV_1$  მოცულობაში, მეორე კი –  $dV_2$  მოცულობაში. სწორად ანორმირეთ მიღებული გამოსახულება.

9.10.  $s = 0$ -სპინიანი ორი იგივეური ბოზონი სტაციონარულ მდგომარეობაში იმყოფება, რომელიც აღინერება ნორმირებული ტალღური  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  ფუნქციით. როგორია იმის ალბათობა, რომ:

- ა) ორივე ნაწილაკი იმყოფება გარკვეული  $V$  მოცულობის შიგნით?
- ბ) ერთი ნაწილაკი იმყოფება  $V$  მოცულობის შიგნით, მეორე კი –  $V$  მოცულობის გარეთ?

9.11.  $s = 0$ -სპინიანი ორი იგივეური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა  $\psi_1(\vec{r})$ , ხოლო მეორესი –  $\psi_2(\vec{r})$ . ეს ფუნქციები ერთიანზეა ნორმირებული და აქვთ ურთიერთსაპირისპირო ლუნობები. სისტემის მოცემულ მდგომარეობაში იპოვეთ სისტემის ერთ-ერთი ნაწილაკის განაწილება კოორდინატების მიხედვით, მაშინ, როდესაც ნებისმიერია (არ ფიქსირდება) მეორე ნაწილაკის მდებარეობა. როგორია იმის ალბათობა, რომ: ა) ერთი ნაწილაკი; ბ) ორივე ნაწილაკი იმყოფება სივრცის მოცულობაში, რომლისთვისაც  $z \geq 0$ ? შეადარეთ მიღებული მნიშვნელობანი სხვადასხვა ნაწილაკის შემთხვევას.

9.12. განიხილეთ 9.11-ის ანალოგიური ამოცანა, როცა სისტემა შედგება ორი იგივეური ფერმიონისაგან, რომლებიც იმყოფებიან ერთი და იგივე სპინურ მდგომარეობებში.

9.13.  $s = 0$ -სპინიანი ორი იგივეური ბოზონისგან შედგენილი სისტემისათვის ნაწილაკებს შორის მანძილის მიხედვით იპოვეთ განაწილების ფუნქცია. როგორ აისახება მიღებულ განაწილებაში ნაწილაკების იგივეურობა? რა ფიზიკური აზრი აქვს გამოსახულებას  $\int |\Psi(\vec{r}, \vec{r})| d\vec{r}$ , სადაც  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  სისტემის ნორმირებული ტალღური ფუნქციაა.

**მითითება:** შემოიღეთ მასათა ცენტრისა და ფარდობითი რადიუსვექტორები:

$$\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{2}; \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2.$$

9.14. როგორც ცნობილია, ორი სხეულის ამოცანაში მასათა ცენტრისა და ფარდობითი მოძრაობა ერთმანეთისაგან დამოუკიდებელია. აჩვენეთ, რომ ორი იგივეური ნაწილაკისათვის ტალღური ფუნქციის სიმეტრია ნაწილაკების გადასმის მიმართ არ არღვევს ზემოთ ნახსენებ დამოუკიდებლობას.

9.15. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს ჯამურმა  $S$  სპინმა ორი  $s$ -სპინიანი იგივეური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში იმ მდგომარეობაში, როდესაც ფარდობითი ორბიტალური მომენტი  $L$  ( $L$  მომენტი ინერციის ცენტრის სისტემაში), ანუ რა  $^{2S+1}L$  მდგომარეობებია შესაძლებელი ორი იგივეური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში? განიხილეთ კერძო შემთხვევა  $s = 0$ .

9.16. განიხილეთ წინა 9.15 ამოცანის მგავსი ამოცანა ორი ფერმიონისათვის. სპეციალურად განიხილეთ  $s = 1/2$ -სპინიანი ფერმიონების შემთხვევა.

9.17. ორი იგივეური  $s = 0$ -სპინიანი ბოზონი ერთმანეთთან დაკავშირებულია

$$U = \frac{k(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2}{2}$$

პოტენციალით. როგორია სისტემის ენერგეტიკული სპექტრი?

მითითება: ისარგებლეთ 4.28 ამოცანის შედეგებით.

9.18. სისტემა შედგება სამი იგივეური ნაწილაკისგან;  $\vec{r}_{1,2,3}$ - ნაწილაკების რადიუს-ვექტორებია ინერციის ცენტრის სისტემაში. როგორ იქცევა  $\vec{r}_1 \vec{r}_2$  სიდიდე 1 და 3 ნაწილაკების გადასმისას?

9.19. აჩვენეთ, რომ სამი ნაწილისგან შემდგარ სისტემაში (არ არის აუცილებელი ნაწილაკები იგივეური იყოს), მდგომარეობას, რომელშიც ჯამური ორბიტალური მომენტი  $L = 0$  (ინერციის ცენტრის სისტემაში), გააჩნია გარკვეული დადებითი ლუნობა.

9.20. სპინიანი ორი იგივეური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა  $\psi_1(\vec{r})$ , ხოლო მეორესი –  $\psi_2(\vec{r})$ . ეს ფუნქციები ერთიანზე ნორმირებული და ურთიერთორთოგონალურია. როგორია იმის ალბათობა, რომ ორივე ნაწილაკი იმყოფებოდეს სივრცის მცირე  $dV$  მოცულობაში? შეადარეთ მიღებული მნიშვნელობანი სხვადასხვა ნაწილაკების შემთხვევას.

9.21.\*  $s = 0$ -სპინიანი ორი იგივეური ბოზონისგან შედგენილ სისტემაში ერთი ბოზონის ტალღური ფუნქციაა  $\psi_1(\vec{r})$ , ხოლო მეორესი –  $\psi_2(\vec{r})$ . ეს ფუნქციები ერთიანზეა ნორმირებული. იპოვეთ ასეთი სისტემის საშუალო სიმკვრივე და შეადარეთ განსხვავებული ნაწილაკების შემთხვევას.

**მითითება:** ერთიანზე ნორმირებული ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = C\{\psi_1(\vec{r}_1)\psi_2(\vec{r}_2) + \psi_2(\vec{r}_1)\psi_1(\vec{r}_2)\},$$

სადაც

$$2C^2 = \left(1 + |\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle|^2\right)^{-1}$$

9.22. თუ  $\psi_a$  და  $\psi_b$  ორთონორმირებული ფუნქციებია, მაშინ:

ა) რისი ტოლია  $A$  სიდიდე გამოსახულებაში

$$\psi_{\pm}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A[\psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) \pm \psi_b(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)];$$

ბ) რისი ტოლია  $A$  სიდიდე, თუ  $\psi_a = \psi_b$  (რასაკვირველია, ეს შემთხვევა ეხება მხოლოდ ბოზონებს).

9.23. ორი არაურთიერთქმედი ტოლი  $m$  მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში, იპოვეთ ენერჯიის ძირითადი დონე 3 შემთხვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის; ბ) ბოზონებისათვის; გ) ფერმიონებისათვის.

9.24. დაწერეთ ჰამილტონიანი ორი არაურთიერთქმედი იგივე ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში. შეამოწმეთ, რომ წინა 9.23 ამოცანაში ფერმიონებისათვის ნაპოვნი ძირითადი დონე არის ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობა.

9.25. ორი არაურთიერთქმედი ტოლი  $m$  მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში, იპოვეთ ენერჯიის პირველი ორი აგზნებული დონე 3 შემთხვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის; ბ) ბოზონებისათვის; გ) ფერმიონებისათვის. შეისწავლეთ დონეების გადაგვარების საკითხი.

9.26.\* ორი არაურთიერთქმედი ტოლი  $m$  მასის ნაწილაკისათვის, რომლებიც იმყოფებიან  $a$  სიგანის უსასრულო სიმაღლის პოტენციურ ორმოში, ერთი მათგანი

იმყოფება  $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} x$  მდგომარეობაში, მეორე კი მის ორთოგონალურ

$\psi_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{m\pi}{a} x$  მდგომარეობაში. დათვალეთ საშუალო  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$  3 შემ-

თხვევაში: ა) განსხვავებული ნაწილაკებისათვის; ბ) ბოზონებისათვის; გ) ფერმიონებისათვის. შეისწავლეთ დონეების გადაგვარების საკითხი.

**მითითება:** ისარგებლეთ 2.9 ამოცანის შედეგებით:

$$\langle x \rangle_n = \frac{a}{2}; \langle x^2 \rangle_n = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2}.$$

## 9.2. მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმის ელემენტები

9.27. იპოვეთ კომუტაციური თანაფარდობები ოპერატორებისათვის, რომლებიც წარმოადგენენ ბოზონური გაქრობის  $\hat{a}$  (ან  $\hat{a}^+$  გაჩენის) ოპერატორების ერმიტულ და არაერმიტულ ნაწილებს.



9.28. ნანილაკის  $\hat{x}$  კოორდინატის და  $\hat{p}$  იმპულსის ოპერატორებისაგან ააგეთ  $\hat{a}$  და  $\hat{a}^+$  ოპერატორები, რომელთაც ექნებათ ბოზეს გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორების თვისებები.

როგორი სახე აქვს  $\Psi_0$  „ვაკუუმურ“ მდგომარეობას?

9.29. იპოვეთ გაჩენისა და გაქრობის ოპერატორების საკუთარი ფუნქციები და საკუთარი მნიშვნელობები. განიხილეთ ბოზესა და ფერმის ოპერატორები.

**მიითითება:** გამოიყენეთ 2.57 ამოცანის შედეგები.

9.30. ფერმიონული  $\hat{b}$  გაქრობის და  $\hat{b}^+$  გაჩენის ოპერატორების ანტიკომუტაციური თანაფარდობიდან გამომდინარე, აჩვენეთ, რომ  $\hat{n} = \hat{b}^+ \hat{b}$  ნანილაკთა რაოდენობის ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია 0 და 1.

9.31.  $\hat{a}$  და  $\hat{a}^+$  ოპერატორებიდან ახალ  $\hat{a}' = \hat{a} + \alpha$ ,  $\hat{a}'^+ = \hat{a}^+ + \alpha^*$  ( $\alpha$  კომპლექსური რიცხვია) ოპერატორებზე გადასვლა წარმოადგენს თუ არა უნიტარულ გარდაქმნას? როგორია ამ უნიტარული ოპერატორის სახე? განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები.

მიითითება: უნიტარული ოპერატორის სახის დასადგენად ისარგებლეთ 1.34 ამოცანის შედეგით.

9.32.  $\hat{a}$  და  $\hat{a}^+$  ოპერატორებიდან ახალ  $\hat{a}' = \alpha \hat{a} + \beta \hat{a}^+$ ,  $\hat{a}'^+ = \alpha \hat{a}^+ + \chi \hat{a}$  ( $\alpha$  და  $\beta$  ნამდვილი რიცხვია) ოპერატორებზე გადასვლა წარმოადგენს თუ არა უნიტარულ გარდაქმნას (წინასწარ გაარკვიეთ  $\alpha$  და  $\beta$ -ს რა მნიშვნელობებისათვის არის აღნიშნული გარდაქმნა უნიტარული)? განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები.

9.33. შეიძლება თუ არა შემდეგი გარდაქმნისას

$$\hat{a}' = \hat{a}^+, \hat{a}'^+ = \hat{a}$$

$\hat{a}'$ ,  $\hat{a}'^+$  ოპერატორები განიხილოთ, როგორც გაქრობისა და გაჩენის ოპერატორები ახალი ნანილაკებისა? განიხილეთ ფერმიონული და ბოზონური შემთხვევები.

9.34.  $\hat{a}_{f_i}^+$  ოპერატორი წარმოადგენს ნანილაკის გაჩენის ოპერატორს  $\Psi_{f_i}$  მდგომარეობაში ( $f_i$  წარმოადგენს კვანტური რიცხვების სრულ კრებულს). ნებისმიერი ერთნანილაკოვანი მდგომარეობა  $|1\rangle$  შეიძლება წარმოვიდგინოთ შემდეგნაირად:

$$|1\rangle = \sum_i C_{f_i} \hat{a}_{f_i}^+ |0\rangle.$$

რა კვანტურ-მექანიკური აზრი გააჩნიათ  $C_{f_i}$  კოეფიციენტებს?

9.35. როგორც კერძო მაგალითი 9.34 ამოცანისა, განიხილეთ შემდეგი ერთნაწილაკოვანი მდგომარეობა უსპინო ნაწილაკისა:

$$|1\rangle = \int \varphi(r) \Psi^+(\vec{r}) d\vec{r} |0\rangle.$$

ანორმირეთ ეს ფუნქცია ერთიანზე და იპოვეთ საშუალო მნიშვნელობა  $f$  ფიზიკური სიდიდისა.

9.36.  $\hat{a}_{f_i}^+, \hat{a}_{f_i}$  და  $\hat{a}_{g_k}^+, \hat{a}_{g_k}$  ოპერატორები წარმოადგენენ გაჩენისა და გაქრობის ოპერატორებს მდგომარეობებში, რომლებიც ხასიათდებიან  $f_i$  და  $g_k$  კვანტური რიცხვების სრული კრებულებით. იპოვეთ თანაფარდობა ამ ოპერატორებს შორის.

9.37. ორნაწილაკოვანი მდგომარეობა იგივეური ბოზონებისა (ან ფერმიონებისა) აღინერება მდგომარეობის ვექტორით  $|2\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ |0\rangle$ , სადაც  $\hat{a}_{f_i}^+$  ოპერატორი წარმოადგენს ნაწილაკის გაჩენის ოპერატორს  $\Psi_{f_i}$  მდგომარეობაში ( $f_i$  წარმოადგენს კვანტური რიცხვების სრულ კრებულს).

ანორმირეთ მდგომარეობის ვექტორი ერთიანზე. განიხილეთ  $f_1$  და  $f_2$  ერთნაირი და განსხვავებული კვანტური რიცხვები. კოორდინატულ წარმოდგენაში იპოვეთ ამ მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები როგორც ბოზონებისათვის, ასევე ფერმიონებისათვის.

9.38. ამოხსენით 9.37 ამოცანის ანალოგიური ამოცანა სამნაწილაკოვანი მდგომარეობისათვის  $|3\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ \hat{a}_{f_3}^+ |0\rangle$ .

## თავი 10. ატომები და მოლეკულები

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

მრავალელექტრონიანი ატომების აღწერისას ძირითადი პრობლემაა შრედინგერის განტოლების ამოხსნა შემდეგი ჰამილტონიანისათვის:

$$H = \sum_i \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 - \frac{Ze^2}{r_i} \right) + \sum_i \sum_j \frac{e^2}{r_{ij}} + W; \quad i < j \quad (10.1)$$

სადაც  $W$  სპინზე დამოკიდებული (სპინ-ორბიტალური, სპინ-სპინური და ზეფაქი-ზი ურთიერთქმედებები) პოტენციური ენერჯიის ოპერატორია. ამოხსნისათვის გამოიყენება სხვადასხვა მიახლოებითი მეთოდი: შეშფოთების თეორია (იხილეთ 6.1 თავი), ვარიაციული მეთოდი (იხილეთ 6.2 თავი), ჰარტრი-ფოკის თვითშეთანხმებული ველის მეთოდი, თომას-ფერმის სტატისტიკური მოდელი და ა.შ.

ჰარტრი-ფოკის მეთოდის თანახმად, ელექტრონი მოძრაობს ატომგულისა და დანარჩენი ელექტრონების გასაშუალოებულ ველში. განიხილეთ  $k$ -ური ელექტრონი. მისი ურთიერთქმედების ენერჯია გულთან ტოლი იქნება  $-\frac{Ze^2}{r_k}$ -სი. იგივე ელექტრონი იმოქმედებს დანარჩენ ელექტრონებთან. მისი ურთიერთქმედება  $j$ -ურ ელექტრონთან, რომელიც გულიდან  $\vec{r}_j$  მანძილზე იმყოფება, ტოლი იქნება გამოსახულების:

$$\int \frac{e^2}{r_{ij}} |\psi(\vec{r}_j)|^2 d\vec{r}_j. \quad (10.2)$$

თუ ელექტრონთა რიცხვი ატომში  $N$ -ს უდრის, მაშინ  $k$ -ური ნაწილაკის ურთიერთქმედების პოტენციალს გულთან და ელექტრონებთან შემდეგი სახე აქვს:

$$V(\vec{r}_k) = -\frac{Ze^2}{r_k} + \sum_{j=1}^N \int \frac{e^2 |\psi(\vec{r}_j)|^2}{|\vec{r}_k - \vec{r}_j|} d\vec{r}_j. \quad (10.3)$$

ამ პოტენციალის შრედინგერის განტოლებაში შეტანით მიიღება ინტეგრირებული ფერენციალური განტოლება, რომლის ამოხსნა შესაძლებელია მიმდევრობითი მიახლოების (იტერაციის) მეთოდით. მაგალითად, ნულოვან მიახლოებაში შეგვიძლია ავიღოთ წყალბადისეული ატომის ტალღური ფუნქციები, რომელთა საშუალებით ვიპოვოთ (10.3) პოტენციურ ენერჯიას. შემდეგ ამ ფუნქციებს შევიტანთ შრედინგერის განტოლებაში და ამოვხსნით. ვიპოვოთ ენერჯიას და ტალღურ ფუნქციას. ამ ახალი ტალღური ფუნქციით შევადგენთ შესწორებულ  $V^{(1)}(\vec{r}_k)$  პოტენ-

ციალს, შემდეგ კვლავ შევიტანთ შრედინგერის განტოლებაში, ვიპოვით ახალ ტალღურ ფუნქციას და ენერგიას და ა.შ. ანუ პოტენციალი და ტალღური ფუნქციები თვითშეთანხმებულად უნდა იქნეს არჩეული.

მძიმე ატომებისათვის გამოიყენება თომას-ფერმის სტატისტიკური მოდელი, რომელშიც ელექტრონების ნერტილოვანი მუხტები შეცვლილია მუხტის უწყვეტი განაწილებით  $-e\rho(r)$  სიმკვრივით. ატომგულის ელექტროსტატიკური  $\Phi(r)$  პოტენციალი და  $\rho(r)$  სიმკვრივე აკმაყოფილებენ პუასონის კლასიკურ განტოლებას

$$\nabla^2\Phi = 4\pi e\rho \quad (10.4)$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$\lim_{r \rightarrow 0} r\Phi = Ze; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0. \quad (10.5)$$

$\Phi(r)$  პოტენციალი შეიძლება გამოსახულ იქნეს  $\phi$  უგანზომილებო ფუნქციით:

$$\Phi(r) = \frac{Ze}{b} \frac{\phi(x)}{x}, \quad (10.6)$$

სადაც  $x = r/b$ ,  $b = 0,885Z^{-1/3}a$ ,  $a = \hbar^2 / me^2$  და  $\phi(x)$  აკმაყოფილებს თომას-ფერმის განტოლებას:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} \phi^{3/2} \quad (10.7)$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$\phi(0) = 1, \quad \phi(\infty) = 0. \quad (10.8)$$

ორატომიანი მოლეკულის ბრუნვითი ენერგიაა:

$$E_\nu = \frac{\hbar^2 \nu(\nu+1)}{2J_0}, \quad (10.9)$$

სადაც  $J_0$  მოლეკულის ინერციის მომენტია,  $\nu$  კი ბრუნვითი (როტაციული) კვანტური რიცხვი ( $\nu = 0,1,2,\dots$ ).  $\nu$ -ს შერჩევის წესია:  $\Delta\nu = \pm 1$ .

ორატომიანი მოლეკულის რხევითი ენერგიაა:

$$E_N = \hbar\omega(N+1/2)[1-x(N+1/2)], \quad (10.10)$$

სადაც  $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$  რხევის სიხშირეა,  $\kappa$  კვაზიდრეკადი ძალის კოეფიციენტი,  $\mu$  –

მოლეკულის დაყვანილი მასა,  $N$  – რხევითი (ვიბრაციული) კვანტური რიცხვი ( $N = 0,1,2,\dots$ ), ხოლო  $x$  – ანჰარმონიულობის კოეფიციენტი (ჰარმონიული ოსცილატორისათვის  $x = 0$ ).

$\Lambda, \Sigma$  და  $\Omega$  კვანტური რიცხვები ახასიათებენ  $\vec{L}, \vec{S}$  და  $\vec{J}$  ჯამური მომენტების პროექციას ორატომიანი მოლეკულის ლერძზე:

$$\Lambda = \left| \sum_i (\pm \lambda_i) \right|, \quad \Lambda = 0, 1, 2, \dots, L,$$

$$\Sigma = \sum_i (\pm \sigma_i), \quad \Sigma = S, S-1, \dots, -S,$$

$$\Omega = \Lambda + \Sigma, \quad \Omega = (\Lambda + S), (\Lambda + S - 1), \dots, (\Lambda - S)$$

$\Lambda = 0$  თერმისათვის სპინის ორიენტაცია ლერძის მიმართ არ გვაქვს და  $\Sigma$  და  $\Omega$  კვანტურ რიცხვებს ფიზიკური არსი არ გააჩნიათ.

ცალკეული ელექტრონების მდგომარეობის და მოლეკულის გარსის მდგომარეობის დასახასიათებლად გამოიყენება შემდეგი აღნიშვნები:

$\sigma, \pi, \delta, \phi, \dots$  შესაბამისად,  $\lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ -თვის,

$\Sigma, \Pi, \Lambda, \Phi, \dots$  შესაბამისად,  $\Lambda = 0, 1, 2, 3, \dots$ -თვის.

### 10.1. ერთ- და ორელექტრონიანი ატომების სტაციონარული მდგომარეობები

10.1. იპოვეთ წყალბადისეული ატომის ძირითადი მდგომარეობის ენერჯის შესწორება შემფოტების თეორიის პირველ რიგში იმის გათვალისწინებით, რომ ბირთვს გააჩნია ზომები. ბირთვი ჩათვალეთ  $R$ -რადიუსიან სფეროდ, რომლის მოცულობაშიც თანაბრად არის განაწილებული  $Ze$  მუხტი ( $R = 1,2A^{1/3} \cdot 10^{-13}$  სმ,  $A \approx 2Z$ , სადაც  $A$  ბირთვის ატომური ნომერია). შეაფასეთ შესწორება რიცხობრივად.

10.2. იპოვეთ წყალბადის ატომის ენერჯის შესწორებები შემფოტების თეორიის პირველ რიგში, რომელიც გამოწვეულია სპინ-ორბიტალური ურთიერთქმედებით:

$$H' = \frac{\hbar^2 e^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

**მიითთქა:** გამოიყენეთ შემდეგი თანაფარდობა:

$$\langle \vec{j}^2 \rangle = j(j+1) = l(l+1) + s(s+1) + 2\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle.$$

10.3.\* განიხილეთ წყალბადისეული ატომის  $s$  მდგომარეობის დონეების ზეფაქიზი სტრუქტურა, რომელიც გამოწვეულია ელექტრონის მაგნიტური მომენტის ურთიერთქმედებით ბირთვთან. ბირთვი ნერტილოვან ნაწილაკად შეიძლება ჩავთვალოთ. მას გააჩნია  $I$  სპინი და  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტი და  $\hat{\mu} = \frac{\mu_0}{I} \hat{I}$ .

**მიითთება:** გამოიყენეთ ელექტრონის მაგნიტური მომენტის ბირთვთან ურთიერთქმედების ოპერატორის ცხადი სახე:

$$\hat{V} = \frac{e\hbar\mu_0}{2mcl} \hat{I}_i (\hat{I}_k + 2\hat{S}_k) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_k} - \delta_{ik} \Delta \right) \frac{1}{r}$$

და ამ ოპერატორის გამოყენებით იპოვეთ ელექტრონის  $\Psi_0(r)$  ძირითადი  $1s$  მდგომარეობის საშუალო.

10.4. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში გამოითვალეთ ორელექტრონიანი ატომის (ან იონის) ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. შეშფოთებად ჩათვალეთ ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედება.

10.5. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში გამოითვალეთ ორელექტრონიანი ატომის (ან იონის) ძირითადი მდგომარეობის ენერგია. შეუშფოთებელ ჰამილტონიანად აიღეთ:

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2}(\Delta_1 + \Delta_2) - Z_{eff} \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

(გამოყენებულია ატომურ ერთეულთა სისტემა).  $Z_{eff}$  პარამეტრი იპოვეთ შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში ენერგიის შესწორების ნულთან გატოლებით.

10.6.\* ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ორელექტრონიანი იონის ძირითადი ენერგია და იონიზაციის პოტენციალი.

**მიითთება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ წყალბადის ფუნქციების ნამრავლი გარკვეული  $Z_{eff}$  ეფექტური მუხტით, რომელიც ვარიაციული პარამეტრის როლს თამაშობს და გამოიყენეთ 10.5 ამოცანაში დათვლილი ინტეგრალები.

10.7. იპოვეთ ორელექტრონიანი იონის საშუალო ენერგია, თუ ბირთვის მუხტია  $Ze$  და ტალღურ ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

$$\Psi(r_1, r_2) = C[\exp(-\alpha r_1 - \beta r_2) + \exp(-\beta r_1 - \alpha r_2)]$$

10.8. რა მნიშვნელობები შეიძლება მიიღოს ელექტრონების ფარდობითი მოძრაობის მომენტმა ჰელიუმისმაგვარი ატომების ორთო- და პარამდგომარეობებში?

10.9.\* ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ ჰელიუმისმაგვარი ატომის  $2^3S$  მდგომარეობის ენერგია და იონიზაციის პოტენციალი.

**მიითთება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ სათანადო სიმეტრიის მქონე წყალბადის  $2s$  და  $1s$  მდგომარეობების ფუნქციების ნამრავლი გარკვეული  $Z_{eff}$  ეფექტური მუხტით, რომელიც ვარიაციული პარამეტრის როლს თამაშობს.

## 10.2. მრავალელექტრონიანი ატომები

10.10. იპოვეთ ატომის აღზნებული მდგომარეობების შესაძლო თერმები, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ (შევსებული გარსების ზემოთ;  $n \neq n'$ ): ა)  $nsn'p$ ; ბ)  $npn'p$ ; გ)  $npn'd$ .

10.11. იპოვეთ ატომის აღზნებული მდგომარეობების შესაძლო თერმები, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ (შევსებული გარსების ზემოთ): ა)  $(np)^2$ ; ბ)  $(np)^3$ ; გ)  $(np)^4$ .

ხუნდის წესის გამოყენებით მიუთითეთ ატომის ნორმალური თერმი.

10.12. იპოვეთ  $N$  და  $Cl$  ატომების ძირითადი თერმები.

10.13. განსაზღვრეთ ატომური თერმების ლუნობა, რომელთაც შემდეგი ელექტრონული კონფიგურაცია გააჩნიათ: ა)  $(ns)^k$ ; ბ)  $(np)^k$ ; გ)  $(nd)^k$ ;

10.14. რას უდრის ატომის დამოუკიდებელ მდგომარეობათა რიცხვი, რომელთა ელექტრონული კონფიგურაციაა  $(nl)^3$  და რომელიც შეესაბამება  $S = \frac{3}{2}$  ელექტრონების ჯამურ სპინს?

10.15.\*ატომის აგზნებულ მდგომარეობებს, რომელთა ელექტრონული კონფიგურაციაა  $nsn'l(n \neq n')$ , შეესაბამება ორი თერმი:  $^1L$  და  $^3L$  ( $L$ -ჯამური ორბიტალური მომენტია,  $L = 0$ ). განიხილეთ ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედება, როგორც შეშფოთება და აჩვენეთ, რომ ტრიპლეტური თერმის ენერგია სინგლეტური ენერგიის დაბლაა. არ დააკონკრეტოთ  $ns$  და  $n'l$  ელექტრონების რადიალური ფუნქციების სახე.

**მიითითება:** აჩვენეთ, რომ გაცვლითი ურთიერთქმედების ინტეგრალი დადებითი სიდიდეა.

10.16. თომას-ფერმის მოდელში გამოიყენეთ ნეიტრალური ატომის ელექტრონული სიმკვრივის ფორმულა და იპოვეთ ელექტრონის ბირთვიდან საშუალო დაშორების დამოკიდებულება  $Z$ -ზე.

10.17. თომას-ფერმის მოდელში იპოვეთ ელექტრონების იმპულსების მიხედვით განაწილება ნეიტრალურ ატომში, რომლის ბირთვის მუხტია  $Z$ . გაითვალისწინეთ, რომ ამ მოდელის  $\chi(x)$  უნივერსალური ფუნქცია მონოტონურად კლებულობს  $x$ -ის ზრდასთან ერთად.

10.18. იპოვეთ თომას-ფერმის განაწილებაში  $s$  მდგომარეობაში მყოფი ელექტრონების რაოდენობის დამოკიდებულება  $Z$ -ზე.

10.19. ნეიტრალური ატომისათვის თომას-ფერმის მოდელში გამოსახეთ  $n(r)$  ელექტრონული სიმკვრივის საშუალებით ელექტრონების კინეტიკური ენერგია, მათი ერთმანეთთან და ბირთვებთან ურთიერთქმედების ენერგია.

10.20. თომას-ფერმის მოდელში მიიღეთ ნეიტრალური ატომის სრული ენერჯის დამოკიდებულება  $n(r)$  ელექტრონულ სიმკვრივეზე.

10.21.\* ისარგებლეთ 10.20 ამოცანაში მიღებული შედეგით  $E[n(r)]$ -თვის და აჩვენეთ რომ ამ გამოსახულების მინიმიზაციით მიიღება ტომას-ფერმის განტოლება. იგულისხმება, რომ  $\int n(r)dV = Z$ .

**მიითითება:** მინიმიზაციით მიღებული განტოლების ორივე მხარეზე იმოქმედეთ  $\Delta$  ოპერატორით და გამოიყენეთ ტოლობა  $\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$ .

### 10.3. ორატომიანი მოლეკულა

10.22. ორი ელექტრონისაგან შედგენილი სისტემის მდგომარეობა აღინერება ტალღური ფუნქციით  $\Psi = \chi_{\alpha\beta}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ , სადაც  $\chi_{\alpha\beta}$  სპინური ფუნქციაა, ხოლო სივრცული ცვლადების  $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  ფუნქციას შემდეგი სახე აქვს:

ა)  $\psi = f(r_1, r_2)$ ;    ბ)  $\psi = (\vec{r}_1 \vec{n}_0 + \vec{r}_2 \vec{n}_0) f(r_1, r_2)$ ;

გ)  $\psi = (\vec{r}_1 \vec{n}_0 + \vec{r}_2 \vec{n}_0)([\vec{r}_1 \vec{r}_2] \vec{n}_0) f(r_1, r_2)$ ;

სადაც  $\vec{n}_0$  მუდმივი ვექტორია.

ჩაატარეთ აღნიშნული მდგომარეობების კლასიფიკაცია ორატომიანი მოლეკულების თეორიის შესაბამისად.

10.23. მიუთითეთ წყალბადის  $H_2^+$  მოლეკულური იონის თერმები, რომლებიც შესაძლოა მიღებულ იქნეს პროტონისა და წყალბადის ატომის შეერთების შედეგად, რომელიც იმყოფება  $n = 2$  მთავარი კვანტური რიცხვის მქონე მდგომარეობაში.

10.24.\* განსაზღვრეთ  $N_2, LiH, HCl, NO$  ორატომიანი მოლეკულების თერმები, რომლებიც შესაძლოა მიღებულ იქნენ ძირითად მდგომარეობაში მყოფი შესაბამისი ატომების შეერთების შედეგად.

**მიითითება:** გაითვალისწინეთ, რომ  $N, Li, H, Cl, O$  ატომების ძირითადი თერმებია  $4S_u, 2S_g, 2S_g, 2P_u, 3P_g$ .

10.25. შესაძლებელია თუ არა პროტონების ადიაბატური დაშორებისას  $H_2$  წყალბადის მოლეკულის თერმებიდან მიღებულ იქნეს ალგზნებულ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ორი ატომი?

10.26. შესაძლებელია თუ არა  $LiH$  მოლეკულის თერმებიდან ბირთვების ადიაბატური დაშორებისას მივიღოთ ალგზნებულ მდგომარეობაში მყოფი წყალბადის ატომი?



**მიითითება:** ლითიუმის ატომის ძირითადი მდგომარეობის იონიზაციის პოტენცი-  
ალი  $I = 0,2$  ატ.ერთ.

10.27. ჩათვალეთ, რომ ცნობილია  $H_2$  წყალბადის ატომის შემდეგი მახასიათებ-  
ლები:

ა) მოლეკულის ძირითადი მდგომარეობის ორ არააგზნებულ წყალბადის ატომად  
დისოციაციის  $I_0 = 4,46$  ევ. ენერგია.

ბ) მოლეკულის  $\omega_e$  რხევის სიხშირე  $\hbar\omega_e = 0,54$  ევ.

გ) როტაციური ცვლადი  $B_e = 7,6 \cdot 10^{-3}$  ევ.

ამ მონაცემებით იპოვეთ ეს სიდიდეები  $HD$  და  $D_2$  მოლეკულებისათვის, ანუ  
იმ მოლეკულებისათვის, რომლებშიც ერთი ან ორივე ბირთვი-პროტონები ჩანაც-  
ვლებულია დეიტრონით.

10.28.\* ვარიაციული მეთოდის გამოყენებით იპოვეთ  $H_2^+$  წყალბადის მოლეკუ-  
ლური იონის ძირითადი თერმის  $E_0(R)$  ენერგია.

**მიითითება:** საცდელ ფუნქციად აიღეთ  $\Psi(r) = \sqrt{\frac{\alpha^3}{\pi R^3}} e^{-\frac{\alpha r}{R}}$ , სადაც  $r$  ელექტრო-  
ნის დაშორებაა ბირთვების (პროტონების) შემაერთებელი მონაკვეთიდან, ხოლო  
 $\alpha$  ვარიაციული პარამეტრია.

10.29. წინა, 10.28. ამოცანაში მიღებულ  $E_0(R, \alpha)$  გამოსახულებაში აიღეთ  
 $\alpha = 1,9$  ( $\alpha$ -ს ამ მნიშვნელობისათვის  $E_0(R, \alpha)$  ორი ცვლადის ფუნქციას გააჩნია  
აბსოლუტური მინიმუმი გარკვეული  $R_0$ -თვის, რომელიც დასადგენია). იპოვეთ  
 $R_0$  იონის ზომა ( $R_0$  მანძილია იონის ბირთვებს შორის წონასწორობის მდგომა-  
რეობაში), თერმის  $E_0$  მინიმალური ენერგია და ბირთვების (იონის პროტონების)  
ნულოვანი რხევების  $W_0$  ენერგია. შეადარეთ მიღებული შედეგები ექსპერიმენ-  
ტულ მონაცემებს  $R_0 \approx 2$  ატომ.ერთ,  $E_0 \approx -0,6$  ატომ.ერთ,  $W_0 \approx 0,0044$  ატომ-  
ერთ. შეიძლება თუ არა მოცემული ამოცანის ამოხსნის საფუძველზე დავას-  
კვნათ, რომ არსებობს  $H_2^+$  სტაბილური იონი?

10.30. ორატომიანი მოლეკულისათვის ცნობილია სამ მიმდევრობით ბრუნვით  
დონეებს შორის  $\Delta E_1 = 0,2$  მევ და  $\Delta E_2 = 0,3$  მევ. იპოვეთ ბრუნვითი ენერგია შუა  
დონისათვის.

10.31. იპოვეთ ენერგია, რომელიც აუცილებელია წყალბადის მოლეკულის აღსაგზნებად ძირითადი მდგომარეობიდან პირველ რხევით ( $N = 1$ ) დონეზე გადასასვლელად. რამდენჯერ არის მეტი ეს ენერგია მოცემული მოლეკულის პირველ ბრუნვით ( $\nu = 1$ ) დონეზე გადასასვლელად? წყალბადის მოლეკულისათვის  $\omega = 8,279 \cdot 10^{14}$  1/წმ და  $x = 28,5 \cdot 10^{-3}$ .

10.32.\*  $HF$  მოლეკულისათვის დათვალეთ ბრუნვითი დონეების რიცხვი, რომლებიც მოთავსებულია ძირითად და პირველ აგზნებულ რხევით დონეს შორის.

**მითითება:** ჩათვალეთ, რომ ბრუნვითი მოძრაობა დამოუკიდებელია რხევითი მოძრაობისაგან.

10.33. პაულის პრინციპის საშუალებით დაადგინეთ მაქსიმალური მნიშვნელობა  $\sigma, \pi, \delta$  ეკვივალენტური ელექტრონებისა ორატომიან მოლეკულაში.

10.34. ორატომიან მოლეკულას შემდეგი ელექტრონული კომბინაციები გააჩნია:

- ა) ორი ეკვივალენტური  $\sigma$  ელექტრონი.
- ბ) ორი არაეკვივალენტური  $\sigma$  ელექტრონი.
- გ) ერთი  $\sigma$  და ერთი  $\pi$  ელექტრონი.
- დ) ორი ეკვივალენტური  $\pi$  ელექტრონი.
- ე) ორი არაეკვივალენტური  $\sigma$  ელექტრონი.

თითოეულ შემთხვევაში იპოვეთ შესაძლო ელექტრონული მდგომარეობები მოლეკულის, ანუ  $^{2S+1}\Lambda$  სიმბოლოები.

10.35. იპოვეთ ორატომიანი მოლეკულის ელექტრონული გარსის ჯამური მომენტის პროექციის შესაძლო მნიშვნელობები შემდეგ ელექტრონულ მდგომარეობებში  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$  და  $^2\Pi$ .

10.36. განსაზღვრეთ  $OH$  მოლეკულის შესაძლო ელექტრონული თერმები, რომლებიც წარმოიქმნება ჟანგბადის და წყალბადის ატომების ( $^3P$ ) და ( $^2S$ ) ნორმალური თერმებიდან.

## თავი 11. მოძრაობა მაგნიტურ ველში

### ძირითადი ცნებები და ფორმულები

მაგნიტურ ველში მოძრავი  $S$  სპინის და  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტის მქონე დამუხტული ნაწილაკის ჰამილტონიანს (პაულის ჰამილტონიანს) შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 + U - \frac{\mu_0}{s} \vec{H} \hat{S} \quad (11.1)$$

ამასთან,

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A}; \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla \quad (11.2)$$

სიჩქარის ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{\vec{v}} = \frac{\hat{\vec{p}} - e\vec{A}/c}{m}, \quad (11.3)$$

რომლის კომპონენტები შემდეგ კომუტაციურ თანაფარდობებს აკმაყოფილებენ:

$$[\hat{v}_i, \hat{v}_k] = \frac{ie\hbar}{m^2 c} \epsilon_{ikl} H_l. \quad (11.4)$$

ერთგვაროვან მაგნიტურ  $H_0$  ველში განივი (მაგნიტური ველის მართობ სიბრტყეში) მოძრაობისას დამუხტული უსპინო ნაწილაკის ენერგეტიკული სპექტრი დისკრეტულია (ე.წ. ლანდაუს დონეები):

$$E_n = \hbar \omega_E \left( n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2; \quad \omega_E = \frac{|e|H_0}{mc}. \quad (11.5)$$

თუ ნაწილაკს აქვს  $S$  სპინი და  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტი, მაშინ ლანდაუს დონეებს ასეთი სახე აქვთ:

$$E_n = \hbar \omega_E \left( n + \frac{1}{2} \right) - \frac{\mu_0 H s_z}{s}, \quad n = 0, 1, 2; \quad \omega_E = \frac{|e|H_0}{mc}, \quad (11.6)$$

სადაც  $s_z$  ნაწილაკის სპინის ოპერატორია მაგნიტური ველის გასწვრივ.

მაგნიტურ ველში დენის სიმკვრივე ორი შესაკრების სახით მოიცემა:

$$\vec{j} = \vec{j}_{orb} + \vec{j}_{sp}, \quad (11.7)$$

სადაც პირველი შესაკრები ორბიტალურ მოძრაობასთანაა დაკავშირებული

$$\vec{j}_{orb} = \frac{ie\hbar}{2m} \{ (\nabla \Psi^*) \Psi - \Psi^* (\nabla \Psi) \} - \frac{e^2}{mc} \vec{A} \Psi^* \Psi, \quad (11.8)$$

ხოლო მეორე – ნაწილაკის სპინურ მაგნიტურ მომენტთან:

$$\vec{j}_{sp} = \frac{\mu_0}{s} \text{crot}(\Psi^* \hat{s} \Psi). \quad (11.9)$$

11.1. აჩვენეთ, რომ ვექტორული პოტენციალის გარკვეული კალიბრებისას მაგნიტურ ველში დამუხტული ნაწილაკის ჰამილტონიანი

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{\vec{p}} - \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}) \right)^2$$

შეიძლება ასე წარმოვიდგინოთ:

$$\hat{H} = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \vec{A} \hat{p} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2$$

11.2. იპოვეთ სიჩქარის  $\hat{\vec{v}}$  ოპერატორი დამუხტული ნაწილაკისა მაგნიტურ ველში. დაადგინეთ კომუტაციური თანაფარდობები ამ ვექტორის სხვადასხვა კომპონენტს შორის  $[\hat{v}_i, \hat{v}_k]$  და ასევე იპოვეთ კომუტატორი  $[\hat{v}_i, \hat{x}_k]$ .

11.3. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული ნაწილაკისათვის იპოვეთ განივი (მაგნიტური ველისადმი მართობი) მოძრაობის ორბიტის ცენტრის  $\hat{\rho}_0$  კოორდინატის ოპერატორი, მისი კვადრატი  $\hat{\rho}_0^2$  და ორბიტის რადიუსის კვადრატის  $\hat{\rho}^2$  ოპერატორი.

11.4. დაადგინეთ წინა 6.3. ამოცანაში მიღებული  $\hat{\rho}_0$ ,  $\hat{\rho}_0^2$  და  $\hat{\rho}^2$  ოპერატორების კომუტაციური თანაფარდობები ერთმანეთთან და ჰამილტონიანთან.

11.5.\*იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან  $z$  ღერძის გასწვრივ მიმართულ მაგნიტურ ველში ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბებისას:

ა)  $A_x = 0, A_y = H_0 x, A_z = 0$ ;

ბ)  $A_x = -H_0 y, A_y = 0, A_z = 0$

**მიითითება:** გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები  $\hat{p}_y$  და  $\hat{p}_z$  კომუტირებენ

ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან 
$$\hat{H} = \frac{1}{2\mu} \left\{ \hat{p}_x^2 + \left( \hat{p}_y - \frac{e}{c} H_0 x \right)^2 + \hat{p}_z^2 \right\}$$

და ამოცანა დაიყვანეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ამოცანაზე (ბ) შემთხვევაში კომუტირებენ  $\hat{p}_y$ ,  $\hat{p}_z$  და ამ ყალიბების შესაბამისი  $\hat{H}$ ).

11.6.\* ნინა, 11.5 ამოცანაში იპოვეს ორი სრული სისტემა ტალღური ფუნქციებისა  $\Psi_{np_y p_z}$  და  $\Psi_{np_x p_z}$ , რომლებიც აღწერენ სტაციონარულ მდგომარეობებს დამუხტული ნაწილაკისა ერთგვაროვან  $H_0$  მაგნიტურ ველში მოძრაობისას, ვექტორი ველის ორი სხვადასხვა ყალიბრების შემთხვევაში. იპოვეთ თანაფარდობა ამ ტალღურ ფუნქციებს შორის.

**მიითითება:** წარმოადგინეთ (გაშალეთ) ერთ-ერთი ფუნქცია მეორე ფუნქციების სუპერპოზიციებად და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ პოტენციალების ყალიბრული გარდაქმნა შეიძლება განიხილეთ როგორც უნიტარული გარდაქმნა, რომელსაც ახორციელებს ოპერატორი

$$\hat{U} = \exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f\right),$$

სადაც  $f$  განსაზღვრავს ყალიბრულ გარდაქმნას

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f.$$

11.7.\* იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერჯის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ვექტორული პოტენციალის შემდეგი ყალიბრებისას:  $\vec{A} = \frac{1}{2} [\vec{H}_0 \vec{r}]$ . შესაძლოა თუ არა ერთიანზე ვანორმიროთ განივი მოძრაობის ტალღური ფუნქციები?

**მიითითება:** გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები  $\hat{L}_z$  და  $\hat{p}_z$  კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან ( $z$  ღერძი არჩეულია  $\vec{H}_0$  ველის გასწვრივ) და ამოცანა დაიყვანეთ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების განტოლებაზე.

11.8. იპოვეთ 11.3 ამოცანაში განხილული ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრაობის დამუხტული ნაწილაკისათვის განივი (მაგნიტური ველისადმი მართობი) მოძრაობის ორბიტის ცენტრის კვადრატის  $\hat{p}_0^2$  და ორბიტის რადიუსის კვადრატის  $\hat{r}^2$  ოპერატორების საკუთარი მნიშვნელობები.

11.9. იპოვეთ განივი სივრცული განაწილება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრაობის დამუხტული ნაწილაკისა  $\Psi_{nmp_z}$  სტაციონარულ მდგომარეობებში (იხილეთ

11.7), როდესაც  $m = -\frac{e}{|e|} n$ .

11.10.\* იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერჯის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს

ობს ურთიერთმართობ ერთგვაროვან მაგნიტურ და ელექტრულ ველებში. მიმართეთ  $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ, ხოლო  $x$  ელექტრული ველის გასწვრივ. განიხილეთ ორბიტა  $A_x = A_z = 0$  და  $A_y = Hx$ .

**მითითება:** გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ ოპერატორები  $\hat{p}_y$  და  $\hat{p}_z$  კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან და ამოცანა დაიყვანეთ ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ამოცანაზე.

11.11. იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ნორმირებული ტალღური ფუნქციები და ენერჯიის დონეები დამუხტული უსპინო ნაწილაკისა, რომელიც მოძრაობს პარალელურ ერთგვაროვან მაგნიტურ და ელექტრულ ველებში.

**მითითება:** ისარგებლეთ 11.7. და 2.74 ამოცანების შედეგებით.

11.12.\* იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ენერჯიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები დამუხტული სფერული ოსცილატორის (დამუხტული ნაწილაკი  $U(r) = \frac{1}{2}kr^2$  ცენტრალურ ველში), რომელიც იმყოფება ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში. შეისწავლეთ ზღვრული შემთხვევები სუსტი და ძლიერი მაგნიტური ველებისა.

**მითითება:** გამოიყენეთ ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემა ( $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ მიმართეთ) და ის ფაქტი, რომ ოპერატორები  $\hat{L}_z$  და

$$\hat{H}_l = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{kz^2}{2}$$

კომუტირებენ ერთმანეთთან და სისტემის ჰამილტონიანთან და ამოცანა დაიყვანეთ 11.7 ამოცანაზე.

11.13. იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ენერჯიის დონეები და ნორმირებული ტალღური ფუნქციები დამუხტული ბრტყელი ოსცილატორის (დამუხტული ნაწილაკი, რომელიც სიბრტყეზე ასრულებს მოძრაობას ფიქსირებული წერტილიდან მოცემულ  $a$  მანძილზე), რომელიც იმყოფება ბრუნვის სიბრტყის მართობ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში.

11.14. აჩვენეთ, რომ სივრცის შეზღუდულ არეში ნულისაგან განსხვავებულ  $H(\vec{r})$  მაგნიტურ ველს არ შეუძლია „ჩაიჭიროს“ დამუხტული უსპინო ნაწილაკი ანუ არ არსებობენ ნაწილაკის ისეთი სტაციონარული მდგომარეობები, რომლებშიც ის ლოკალიზებულია სივრცის შეზღუდულ არეში.

11.15. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში იპოვეთ სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები და შესაბამისი ენერგეტიკული დონეები ნეიტრალური ნაწილაკის, რომელსაც  $s = 1/2$  სპინი გააჩნია და აქვს სპინური მაგნიტური მომენტი  $\mu_0$  ( $\hat{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$ ).

**მიითეთება:** მიმართეთ  $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ  $\hat{p}$  და  $\hat{s}_z = \frac{\hat{\sigma}_z}{2}$  ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.16.\* იპოვეთ ნეიტრონის სოლენოიდის მაგნიტურ ველში განივი მოძრაობის სტაციონარული მდგომარეობების დისკრეტული სპექტრის ენერგეტიკული დონეები და ტალღური ფუნქციები.

**მიითეთება:** მიმართეთ  $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ სოლენოიდის შიგნით და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ  $\hat{s}_z = \frac{\hat{\sigma}_z}{2}$  ოპერატორი კომუტირებს ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.17. ნეიტრონი იმყოფება შემდეგი სახის სტაციონარულ მაგნიტურ ველში:

$$H_\rho = H_\varphi = 0, \quad H_z = H(\rho)$$

(ცილინდრულ კოორდინატა სისტემა). დაიყვანეთ ნეიტრონის სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქციების და ენერგეტიკული სპექტრის პოვნის ამოცანა ერთგანზომილებიანი ტალღური განტოლების ამოხსნაზე.

მიითეთება: მიმართეთ  $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ და გამოიყენეთ ის ფაქტი, რომ  $\hat{s}_z, \hat{p}_z, \hat{l}_z$  ოპერატორები კომუტირებენ ერთმანეთთან და ამოცანის ჰამილტონიანთან.

11.18. იპოვეთ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტის მქონე  $s = 1/2$ -სპინიანი დამუხტული ნაწილაკის სტაციონარული მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები და ენერგიის დონეები.

**მიითეთება:** გამოიყენეთ 10.5 ა) და 10.7 ამოცანების შედეგები.

11.19. აჩვენეთ, რომ პაულის ჰამილტონიანი ელექტრონისათვის და  $\mu$  მეზონისათვის ელექტრომაგნიტურ ველში შემდეგი სახით შეიძლება ჩაინეროს:

$$\hat{H} = \frac{i\hat{\sigma} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2}{2\mu} + e\varphi(\vec{r})$$

სამართლიანია თუ არა ჰამილტონიანის ამ სახით ჩანერა სხვა  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკებისათვის (პროტონი, ნეიტრონი და ა.შ)?

**მიითეთება:** გამოიყენეთ 11.2 ამოცანის შედეგები და პაულის მატრიცის თვისებები.

11.20. აჩვენეთ, რომ სტაციონარულ ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში ელექტრონის მოძრაობისას სპინის პროექცია სიჩქარის მიმართულებაზე მოძრაობის ინტეგრალია.

შენარჩუნდება თუ არა ეს შედეგი სხვა ნებისმიერი  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკისათვის?

**მითითება:** გამოიყენეთ 11.19-ის შედეგები.

11.21.\* აჩვენეთ, რომ დამუხტული, სპინიანი, მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის ერთგვაროვან, დროში ცვალებად  $\vec{H}(t)$  მაგნიტურ ველში მოძრაობისას (და ნებისმიერ ელექტრულ ველში) ტალღური ფუნქცია შესაძლოა ჩაინეროს როგორც კოორდინატული ფუნქციისა და სპინური ფუნქციების ნამრავლი.

**მითითება:** გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.1) პაულის განტოლება.

11.22.\* იპოვეთ  $s = 1/2$ -სპინიანი  $\mu$  მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკის სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება და სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები, რომელიც მოძრაობს ერთგვაროვან სტაციონარულ მაგნიტურ ველში.

**მითითება:** მიმართეთ  $z$  ღერძი მაგნიტური ველის გასწვრივ და გამოიყენეთ წინა, 11.21 ამოცანის შედეგები.

11.23. განაზოგადეთ 11.22 ამოცანის შედეგები არასტაციონარული მაგნიტური ველის შემთხვევაში, რომლის მიმართულება უცვლელი რჩება, ანუ  $H(t) = H(t)\vec{n}_0$ .

11.24.\*  $s = 1/2$ -სპინიანი  $\mu$  მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკი იმყოფება შემდეგი სახის ერთგვაროვან  $H(t)$  მაგნიტურ ველში:

$$H_x = H_1 \cos \omega_0 t; H_y = H_1 \sin \omega_0 t; H_z = H_0,$$

სადაც  $H_{0,1}, \omega_0$  მუდმივებია.

$t = 0$  მომენტში ნაწილაკი იმყოფება  $s_z = 1/2$  მდგომარეობაში. იპოვეთ  $s_z$ -ის სხვადასხვა მნიშვნელობის პოვნის ალბათობები  $t$  მომენტში.

**მითითება:** დანერეთ შრედინგერის განტოლება სპინური ტალღური ფუნქციის

$\Psi(t) = \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$   $a(t)$  და  $b(t)$  კომპონენტებისათვის. მიღებული განტოლება

$a = \exp\left\{-\frac{i\omega_0 t}{2}\right\}\tilde{a}$  და  $b = \exp\left\{\frac{i\omega_0 t}{2}\right\}\tilde{b}$  ჩასმებით დაიყვანეთ მუდმივკოეფიცი-

ენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემაზე.

11.25. მაგნიტურ ველში მყოფი დამუხტული უსპინო ნაწილაკისათვის დაადგინეთ თანაფარდობა ორბიტალური მომენტისა  $l$  და მაგნიტური მომენტის  $\mu$  საშუალოებს შორის.



11.26. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული უსპინო ნაწილაკისათვის (რომელიც იმყოფება  $\Psi_{nmp_z}$  სტაციონარულ მდგომარეობაში) იპოვეთ დენის სიმკვრივის ოპერატორი (იხილეთ ამოცანა 11.7).

**მითითება:** გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.8) ფორმულა, რომელიც უსპინო ნაწილაკისათვის არის გამოსადეგი.

11.27. ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში მოძრავი დამუხტული  $s = 1/2$ -სპინიანი  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკისათვის, რომელიც იმყოფება  $\Psi_{nmp_z s_z}$  სტაციონარულ მდგომარეობაში (იხილეთ ამოცანა 11.18), იპოვეთ ენერჯიის დონეები.

**მითითება:** გამოიყენეთ ამ თავის შესავალი ნაწილის (11.7) ფორმულა.

11.28.\* ელექტრონი იმყოფება ძირითად მდგომარეობაში ბირთვის ველში. იპოვეთ ელექტრონის მიერ სივრცეში შექმნილი საშუალო მაგნიტური ველი.

მითითება: გაითვალისწინეთ, რომ ძირითად მდგომარეობაში დენის გამოსახულებაში წვლილი შეაქვს მხოლოდ (11.9) სპინურ ნაწილს და გამოიყენეთ ელექტრო-

დინამიკის ცნობილი ფორმულა ვექტორ-პოტენციალისათვის 
$$\vec{A}(\vec{R}) = \frac{1}{c} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}) dV}{|\vec{R} - \vec{r}|}.$$

11.29.\* კოორდინატთა სათავეში იპოვეთ საშუალო მაგნიტური ველი, რომელსაც ქმნის  $s = 1/2$ -სპინიანი  $\mu_0$  მაგნიტური მომენტის მქონე ნაწილაკი, რომელიც იმყოფება ცენტრალურ ველში  $s$  მდგომარეობაში.

**მითითება:** გაითვალისწინეთ, რომ ძირითად მდგომარეობაში დენის გამოსახულებაში წვლილი შეაქვს მხოლოდ (11.9) სპინურ ნაწილს; გამოიყენეთ წინა, 11.28

ამოცანის ფორმულები და შემდეგი თანაფარდობა 
$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}).$$

# პასუხები

## თავი 1. ოპერატორები კვანტურ მექანიკაში

### 1.1. ნრფივი ოპერატორების თეორიის ძირითადი დებულებები

1.1. ყველა ოპერატორი ნრფივია, გარდა  $\hat{K}$  ოპერატორისა. ყველას გააჩნია შებრუნებული ოპერატორი:

$$\hat{T}_a^{-1} = \hat{T}_{-a}; \quad \hat{I}^{-1} = I; \quad \hat{M}_c^{-1}; \quad \hat{K}^{-1} = \hat{K}; \quad \hat{P}_{12}^{-1} = \hat{P}_{12}.$$

$$1.10. \quad \hat{D}\Psi = \frac{d^3\Psi}{dx^3} + 3x\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (3x^2 + 3)\frac{d\Psi}{dx} + (x^3 + 3x)\Psi.$$

$$1.11. \quad \hat{L}\Psi = \frac{d^3\Psi}{dx^3} + \frac{3}{x}\frac{d^2\Psi}{dx^2}.$$

$$1.12. \quad \text{ა) } \hat{A}\cos x = (2 - x^2)\cos x - 4x\sin x; \quad \hat{B}\cos x = (1 - x^2)\cos x - 3x\sin x$$

$$\text{ბ) } \hat{A}e^x = (2 + 4x + x^2)e^x; \quad \hat{B}e^x = (1 + 3x + x^2)e^x.$$

$$1.13. \quad \hat{A} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx}; \quad \hat{B} = x^2\frac{d^2}{dx^2} + 3x\frac{d}{dx} + 1.$$

$$1.14. \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2\Delta + 2i\hbar(\vec{A}\nabla) + i\hbar\text{div}\vec{A} + \vec{A}^2.$$

1.15. ა) თუ გაშლით ექსპონენტას მწკრივად და გაითვალისწინებთ, რომ  $\hat{I}^2 = 1$ , მიიღებთ  $\exp\{ia\hat{I}\} = \cos a + i(\sin a)\hat{I}$ ;

ბ) ადვილი საჩვენებელია, რომ  $\hat{L}_a = \sum_n \frac{1}{n!} \left(ax\frac{d}{dx}\right)^n$  ოპერატორის მოქმედება  $x^k$ -ზე

არის  $\hat{L}_a x^k = (e^a x)^k$ . ამიტომ, თუ  $\Psi(x)$  ფუნქციას გაშლით ტეილორის მწკრივად, მიიღებთ:

$$\hat{L}_a \Psi(x) = \hat{L}_a \sum_n \frac{c_k}{k!} x^k = \sum_n \frac{c_k}{k!} (e^a x)^k = \Psi(e^a x).$$

1.16. განსაზღვრეთ  $\hat{T}_a$  ოპერატორი შემდეგი ტოლობით:

$$\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x + a).$$

და გაშალეთ  $\psi(x + a)$  მწკრივად:

$$\psi(x + a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} \psi(x).$$

და რადგანაც  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ , საბოლოოდ გვექნება:

$$\hat{T}_a = e^{a \frac{d}{dx}}.$$

1.17. განსაზღვრეთ  $\hat{T}_a$  ოპერატორი ტოლობით:

$$\hat{T}_a \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} + \vec{a}).$$

თუ გაშლით  $\psi(\vec{r} + \vec{a})$ -ს ტეილორის მწკრივად  $\vec{r}$ -ის მახლობლად, მიიღებთ:

$$\hat{T}_a = e^{a \vec{\nabla}}.$$

1.18. განსაზღვრეთ  $\hat{T}_a$  ოპერატორი ტოლობით:

$$\hat{T}_a \psi(\varphi) = \psi(\varphi + \alpha).$$

თუ გაშლით  $\psi(\varphi + \alpha)$ -ს ტეილორის მწკრივად  $\varphi$ -ის მახლობლად, მიიღებთ:

$$\hat{T}_a = e^{\alpha \frac{d}{d\varphi}}.$$

1.19. ტოლი იქნება.

$$1.23. [\Delta, x] = 2 \frac{d}{dx}$$

$$1.24. \hat{A} = \hat{L} \hat{M}^2 - M^2 \hat{L} = 2 \hat{M}$$

1.25. წინა 1.24 ამოცანის შედეგის გამოყენებით, ინდუქციის მეთოდით შეიძლება დაამტკიცოთ, რომ სამართლიანია ტოლობა:

$$\hat{M} \hat{L}^n - \hat{L}^n \hat{M} = -n \hat{L}^{n-1}. \quad (1)$$

განმარტების თანახმად:

$$f(\hat{L}) = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{L}^n. \quad (2)$$

ამიტომ (1) და (2)-დან გვექნება:

$$\hat{A} = f(\hat{L}) \hat{M} - \hat{M} f(\hat{L}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (\hat{L}^n \hat{M} - \hat{M} \hat{L}^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{(n-1)!} \hat{L}^{n-1}. \quad (3)$$

თუ დავუშვებთ, რომ  $n-1 = n_1$ , მაშინ (3)-დან მიიღებთ:

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{f^{(n_1+1)}(0)}{n_1!} \hat{L}^{n_1} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \frac{[f'(0)]^{(n_1)}}{n_1!} \hat{L}^{n_1} = f'(\hat{L}) \quad (4)$$

ამრიგად გვექნება:

$$\hat{A} = f(\hat{L})\hat{M} - \hat{M}f(\hat{L}) = f'(\hat{L}). \quad (5)$$

1.26.  $n = m = 1$

1.27. ა) გაამრავლეთ  $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = 1$  ტოლობა  $\hat{B}$  ოპერატორზე ჯერ მარცხნიდან, შემდეგ კი მარჯვნიდან. მიიღებთ  $\hat{B}\hat{A}\hat{B} - \hat{B}^2\hat{A} = \hat{B}$  და  $\hat{A}\hat{B}^2 - \hat{B}\hat{A}\hat{B} = \hat{B}$ . ამ ტოლობების შეკრებით მიიღებთ  $[\hat{A}, \hat{B}^2] = 2\hat{B}$ .

1.29. ზოგადად, არ კომუტირებენ. მაგალითად,  $\hat{p}_y$  ოპერატორი კომუტირებს  $x$  და  $\hat{p}_x$  ოპერატორებთან, რომლებიც ერთმანეთთან არ კომუტირებენ.

$$1.37. (\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1} = \hat{A}^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n (\hat{B}\hat{A}^{-1})^n.$$

1.39. ა)  $2i\hbar\hat{p}_x$ ; ბ)  $2i\hbar x$ .

$$1.40. ა) 2i\hbar(x\hat{p}_x + \hat{p}_x x) \quad ბ) 6x + x^2 \frac{d}{dx}.$$

1.44. გვაქვს:

$$\Psi(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n \frac{d^n}{dx^n} \Psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{ia}{\hbar}\right)^n \hat{p}^n \Psi(x) = e^{\frac{i\hat{p}a}{\hbar}} \Psi(x) \equiv \hat{T}(a)\Psi(x).$$

ცხადია, რომ  $\hat{T}(a) = \exp(i\hat{p}a/\hbar)$  ტრანსლაციის ოპერატორია, სადაც  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  იმპულსის ოპერატორია. ამიტომ პირდაპირ შეიძლება ჩვენება, რომ:

$$\left[ \hat{T}(a), \frac{1}{2m} \hat{p}^2 \right] = 0, \quad (1)$$

ხოლო

$$\begin{aligned} [\hat{T}(a), V(x)]\psi(x) &= \hat{T}(a)V(x)\psi(x) - V(x)\hat{T}(a)\psi(x) = \\ &= V(x+a)\psi(x+a) - V(x)\psi(x+a) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

რადგანაც ამოცანის პირობის  $V(x+a) = V(x)$ . (1) და (2)-დან აშკარად ჩანს, ჰამილტონიანი კომუტირებს ტრანსლაციის  $\hat{T}(a)$  ოპერატორთან.

1.48.  $\vec{a}$ .

$$1.49. -\frac{i}{\hbar} \alpha x^{\alpha+\beta-1}.$$

$$1.50. \left\{ \frac{d}{dx}, f(x) \right\} = \frac{i}{\hbar} \frac{df}{dx}.$$

$$1.58. \hat{A}^+ = -\frac{d}{dx}.$$

$$1.59. \hat{A}^+ = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}.$$

$$1.60. \hat{T}_{\vec{a}}^+ = \hat{T}_{-\vec{a}}.$$

1.61.

$$\left( e^{i\alpha \frac{d}{d\phi}} \right)^+ = \left( e^{i\alpha \frac{d}{d\phi}} \right).$$

1.62. რადგანაც  $f(x, y, z)$  ფუნქციის ნამდვილობა ნიშნავს, რომ სრულდება პირობა  $f = f^*$ , ამიტომ დამტკიცება ცხადია.

1.72. დავუშვათ, სამართლიანია

$$\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}, \quad (1)$$

მაშინ

$$\hat{L}^+ = \hat{A} - i\hat{B}. \quad (2)$$

ამ ორი ტოლობიდან მიიღებთ:

$$\hat{A} = \frac{\hat{L} + \hat{L}^+}{2}; \quad \hat{B} = \frac{\hat{L} - \hat{L}^+}{2i}. \quad (3)$$

1.73. ჩანერეთ  $\hat{L} = \hat{A} + i\hat{B}$ , საიდანაც:

$$\hat{L}^2 = \hat{A}^2 - \hat{B}^2 + i(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}), \quad (1)$$

ცხადია, რომ  $\hat{L}^2$  ოპერატორი ერმიტული იქნება ( $\hat{A}$  და  $\hat{B}$  ოპერატორების ერმიტულობის გათვალისწინებით), როცა  $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A} = 0$ .

## 1.2. საკუთარი ფუნქციები და მნიშვნელობები. საშუალოს ცნება. პროექციული და უნიტარული ოპერატორები

1.76. ა) საკუთარი ფუნქციებია  $\psi(x) = e^{i\beta x}$ , სადაც  $\beta$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ბ) საკუთარი ფუნქციებია  $\psi(x) = e^{-i\lambda x}$ , სადაც  $\lambda$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

ორივე შემთხვევაში სპექტრი უწყვეტია.

1.77. საკუთარი ფუნქციებია  $\psi(x) = ce^{\lambda x - \frac{x^2}{2}}$ , სადაც  $c$  და  $\lambda$  ნებისმიერი რიცხვებია. ეს ამონახსნები აკმაყოფილებენ სასრულობის, უწყვეტობის და ცალსახობის მოთხოვნებს. სპექტრი უწყვეტია.

1.78.  $\psi = Ce^{i\lambda x}$ ;  $\lambda = \frac{2\pi n}{a}$ ;  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

1.79. საკუთარი ფუნქციებია  $\psi(\varphi) = ce^{im\varphi}$ , სადაც  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.80. იმისათვის, რომ ვიპოვოთ ამოხსნა საკუთარი ფუნქციების განტოლებისა:

$$\sin \frac{d}{d\varphi} \psi = \lambda \psi. \quad (1)$$

გავშალოთ  $\sin \frac{d}{d\varphi}$  ოპერატორი მწკრივად:

$$\sin \frac{d}{d\varphi} \psi = \left( \frac{d}{d\varphi} - \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\varphi^3} + \frac{1}{5!} \frac{d^5}{d\varphi^5} - \dots \right) \psi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{d^{2k+1}}{d\varphi^{2k+1}} \psi. \quad (2)$$

(1)-ის ამოხსნა (2)-ის გათვალისწინებით უნდა ვეძებოთ შემდეგი სახით  $\psi(\varphi) = e^{\alpha\varphi}$  და ფუნქციის ცალსახობის პირობა, მსგავსად წინა 1.79 ამოცანისა, მოგვცემს  $\alpha = im$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). ამ ამოხსნის ჩასმით (1) განტოლებაში მიიღებთ საკუთარი მნიშვნელობებს:

$$\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (im)^k = \sin(im).$$

1.81. ანალოგიურად 1.80 ამოცანისა, გვექნება:

$$\psi(\varphi) = e^{m\varphi}; \quad \lambda = \cos m; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.82. ანალოგიურად 1.80 ამოცანისა, გვექნება:

$$\psi(\varphi) = e^{m\varphi}; \quad \lambda = a^{-am}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.83.  $\psi(x) = \frac{C \sin \beta x}{x}$ , სადაც  $\beta$  ნებისმიერი ნამდვილი რიცხვია.

1.84.  $A = -9$ .

185. ა)  $e^{ax}$ ; ბ)  $e^{ax}$  და  $\sin ax$ .

1.86. საკუთარი ფუნქციაა  $\cos kx + \sin kx$ , ხოლო საკუთარი მნიშვნელობაა  $-k^2$ .

1.87. ა)  $A = 4$ ; ბ)  $A = 1$ .

1.88.  $A = -\alpha^2$ .

1.89.  $A = k$ .

1.90.  $\psi = C \sin(\sqrt{\lambda}x)$ ,  $\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ ;  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$

1.91. ა)  $f(x, y) \exp(ik_y y)$ ; ბ)  $A \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z)]$ ;

გ)  $f(y, z) \exp(\pm ik_x x)$ .

აქ  $k_\gamma = \frac{p_\gamma}{\hbar}$ ;  $\gamma = x, y, z$ , ხოლო  $f$  ნებისმიერი ფუნქციაა.

1.97. საკუთარი ფუნქციაა  $\psi(x) = e^{i\alpha} f(x)$ , სადაც  $\alpha$  ნებისმიერი ნამდვილი სიდიდეა, ხოლო  $f(x)$  ნებისმიერი ნამდვილი ფუნქციაა.

1.100. ა)  $\psi_1 = A e^{ikx}$ ;  $\psi_2 = B e^{-ikx}$ , სადაც  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ , ხოლო  $E$  ენერგია – სა-

კუთარი მნიშვნელობაა. ბ)  $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{2ma^2}$ ;  $\psi_n = C \sin \frac{n\pi}{a} x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; ტალღურ

ფუნქციას ექნება  $n-1$  კვანძი.

1.101. ა)  $f_{1,2} = \pm c$ ; ბ)  $f_1 = 0$ ;  $f_2 = c$ ; გ)  $f_1 = 0$ ;  $f_{2,3} = \pm c$ .

1.102. საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi_f(x) = C \exp\left\{-\frac{i(\beta x - f)^2}{2\hbar\alpha\beta}\right\}$ , ხოლო საკუთარი

მნიშვნელობაა ნებისმიერი ნამდვილი  $f$  რიცხვი. სპექტრი უწყვეტია და გადაუგვარებელი.

105. ა) ოპერატორების არაკომუტატიურობა არ ნიშნავს იმას, რომ არ არსებობენ ისეთი მდგომარეობები, რომლებშიც შესაბამის ფიზიკურ სიდიდეებს ერთდროულად აქვთ განსაზღვრული მნიშვნელობები. თუკი ასეთი მდგომარეობები არსებობენ, მათი ტალღური ფუნქციები არ ადგენენ სრულ სისტემას. მაგალითად, როგორც III თავში ვნახავთ, იმპულსის მომენტის ოპერატორის კომპონენტები ერთმანეთთან არ კომუტირებენ, მაგრამ  $L = 0$  მდგომარეობაში იმპულსის მომენტის კომპონენტებს გააჩნიათ  $L_i = 0$  განსაზღვრული მნიშვნელობა (იხილეთ აგრეთვე 1.105 ამოცანა)

ბ) თუ ოპერატორები კომუტირებენ, ეს არ ნიშნავს, რომ, თუ  $A$ -ს გააჩნია გარკვეული მნიშვნელობები,  $B$ -საც აქვს გარკვეული მნიშვნელობები. მკაცრად შეიძლება ითქვას შემდეგი: მდგომარეობები, რომელშიც  $A$ -სა და  $B$ -ს

ერთდროულად აქვთ განსაზღვრული მნიშვნელობანი, არსებობენ და ამგვარი მდგომარეობების ტალღური ფუნქციები ადგენენ სრულ სისტემას. მაგალითი:

ერთგანზომილებიანი მოძრაობისას  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  იმპულსის და კინეტიკური ენერჯის

რგის  $\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$  ოპერატორები კომუტირებენ, მაგრამ  $\psi(x) = C \sin \frac{p_0 x}{\hbar}$  მდგომარეობაში კინეტიკურ ენერჯიას გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა, იმპულსს კი – არა. თუკი  $\hat{A}$  ოპერატორის საკუთარ მნიშვნელობათა სპექტრი გადაუგვარებელია, მაშინ  $\hat{A}$  ოპერატორთან კომუტირებად ნებისმიერ ოპერატორს  $\Psi_{A_i}$  მდგომარეობაში ასევე გააჩნია განსაზღვრული მნიშვნელობა (იხილეთ 1.104 ამოცანა).

1.106.  $(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A})\Psi_{ab} = (ab + ba)\Psi_{ab} = 2ab\Psi_{ab} = 0$ . ამრიგად,  $ab = 0$  და ამიტომ ან  $a$ , ან  $b$  ნულია. მაგალითი:  $\hat{x}\hat{I} + \hat{I}\hat{x} = 0$  და არსებობს მხოლოდ ერთი ტალღური ფუნქცია  $\Psi_0 = \delta(x)$ , რომელიც ერთდროულად საკუთარი ფუნქციაა  $\hat{x}$  და  $\hat{I}$  ოპერატორების, იმავდროულად, კოორდინატის საკუთარი მნიშვნელობაა:  $x_0 = 0$ .

1.109. საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi_f(x) = C \exp\left\{\frac{(x-f)^2}{2}\right\}$ . ეს ფუნქცია ნებისმიერი

საკუთარი მნიშვნელობისთვის  $f$ , უსასრულოდ იზრდება  $x \rightarrow \pm\infty$ -თვის. ასეთი ფუნქციები კი გამოირიცხება განხილვიდან, რის გამოც ითვლება, რომ მოცემულ  $\hat{f}$  ოპერატორს საერთოდ არ გააჩნია საკუთარი ფუნქცია.

1.110. საკუთარი ფუნქციაა  $\Psi_f(x) = C \exp\left\{-\frac{(x-f)^2}{2}\right\}$ . საკუთარი მნიშვნელობა

$f$  ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვია. სხვადასხვა საკუთარი მნიშვნელობების შესაბამისი ტალღური ფუნქციები არ არიან ორთოგონალური.

1.111. ა)  $\frac{d\phi_1 - \phi_2}{\sqrt{1-d^2}}$ ; ბ)  $\frac{\phi_1 - \phi_2}{2-2d}$ .

1.112.  $\langle x \rangle = \frac{b}{2}$ ;  $\langle E_k \rangle = \frac{a^2 \hbar^2}{5mb^2}$ .

1.113. ა)  $k\hbar$  ბ) 0 გ) 0.



1.116. ა)  $\langle x \rangle = 0$ ;  $\langle p_x \rangle = \hbar k$ .

1.117. ა)  $c_i = \int \varphi_i^* \psi dx$ ; ბ)  $|c_k|^2$  კოეფიციენტები  $A_k$  ფიზიკური სიდიდის პოვნის ალბათობებია  $\psi(x)$  მდგომარეობაში.

1.118.  $A^2 = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}$ ;  $\langle x \rangle = a$ ;  $\langle x^2 \rangle = a^2 + \frac{1}{4\lambda}$ ;  $\sigma_x^2 = \frac{1}{4\lambda}$

1.119.  $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$ ;  $\langle U \rangle = -\frac{e^2}{a_0}$

1.120.  $A = \sqrt{\lambda}$ ;  $\langle x \rangle = 0$ ;  $\langle x^2 \rangle = \frac{1}{2\lambda^2}$ ;  $\sigma_x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ ; ალბათობა  $W = 1 - e^{-\sqrt{2}}$

1.121.  $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$ ;  $\langle x \rangle = \frac{l}{2}$ ;  $\langle p_x \rangle = 0$ ;  $\langle E_k \rangle = \frac{2\hbar^2 \pi^2}{4ml^2}$

1.122.  $A^2 = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ;  $\langle x \rangle = 0$ ;  $\langle p_x \rangle = \hbar k$ ;  $\langle E_k \rangle = \frac{\hbar^2}{4m} \left( \frac{1}{a^2} - k^2 \right)$

1.124.  $\langle x \rangle = x_0$ ;  $\langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{2} + x_0^2$ ;  $\sigma_x = \frac{a^2}{2}$ ;  $\langle p \rangle = p_0$ ;  $\langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2} + p_0^2$ ;

$\sigma_p = \frac{\hbar^2}{2a^2}$

1.125. ა)  $A = \sqrt{\frac{3}{b}}$ ; ბ) ნაწილაკის პოვნა ყველაზე დიდი ალბათობაა  $x = a$  ნერ-

ტილში; გ) ალბათობა ტოლია  $P = \int_0^a |\Psi|^2 dx = \frac{a}{b}$ ; თუ  $b = a$ ,  $P = 1$ . თუ  $b = 2a$ ,

$P = 1/2$ ; დ)  $\langle x \rangle = \frac{2a + b}{4}$ ;

1.127. ა)  $\langle x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle - a$ ;  $\langle p_2 \rangle = \langle p_1 \rangle$ . ბ)  $\langle x_2 \rangle = \langle x_1 \rangle$ ;  $\langle p_2 \rangle = \langle p_1 \rangle + p_0$

1.130.  $\langle \hat{P}(f_i) \rangle = |C_i|^2$ , სადაც  $C_i$  კოეფიციენტები მონაწილეობენ  $\Psi$ -ის გაშლაში  $\Psi_{f_k}$  ფუნქციებად:  $\Psi = \sum_k C_k \Psi_{f_k}$

1.131.  $P_+ = \frac{1+I}{2}$ ;  $P_- = \frac{1-I}{2}$ , სადაც  $I$  კოორდინატთა ინვერსიის ოპერატორია.

1.133.  $\hat{U} = 1$

1.134.  $|c| = 1$  ანუ  $c = \exp(i\alpha)$ , სადაც  $\alpha$  ნამდვილი რიცხვია.

1.136. შეიძლება, თუ  $\hat{U}^2 = 1$ . ასეთ ერმიტულ ოპერატორს საკუთარი მნიშვნელობები აქვს მხოლოდ ორი: 1 და -1. ამრიგად, თუ ერმიტულ ოპერატორს საკუთარი მნიშვნელობები აქვს  $\pm 1$ , მაშინ ის უნიტარული ოპერატორიცაა.

1.138. 
$$\hat{U} = \exp(i\hat{F}) = \exp(i\hat{F}/2) [\exp(-i\hat{F})]^{-1} = \frac{\cos(\hat{F}/2) + i \sin(\hat{F}/2)}{\cos(\hat{F}/2) - i \sin(\hat{F}/2)}$$

**თავი 2. ერთგანზომილებიანი მოძრაობა**

**2.1. დისკრეტული სპექტრი. სტაციონარული მდგომარეობები**

2.2. არანორმირებული ტალღური ფუნქციაა  $\Psi_E^{(\pm)}(x) = A_E^{(\pm)} \exp\left(\pm \frac{i}{\hbar} px\right)$ , სა-

დაც  $p = \sqrt{2mE}$  და  $E \geq 0$ . თავისუფალი მოძრაობა ინფინიტურია, რის გამოც სპექტრი უწყვეტია. გვაქვს სპექტრის ორჯერადი გადაგვარება.

2.4. ა) ამ შემთხვევაში არ გვაქვს ბმული მდგომარეობები; ბ) ამ შემთხვევაში  $x \rightarrow -\infty$  მხარეს  $E - V(x)$  უარყოფითია და ამ ასიმპტოტურ არეში შრედინგერის განტოლების ორი დამოუკიდებელი ამოხსნიდან მხოლოდ ერთი შეესაბამება ბმულ მდგომარეობას; გ) გვაქვს ბმული მდგომარეობები. თუ  $V_+ = V = V_0$ , მაშინ გვაქვს ბმული მდგომარეობები თუ  $V_0 > E$ .

2.6. ა)  $\psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$ ;  $k^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_0)$ , სადაც  $A$  და  $B$  ნებისმიერი მუდმივებია.

ბ)  $\psi(x) = Ce^{i\lambda x} + De^{-i\lambda x}$ ;  $\lambda^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - E)$ , სადაც  $C$  და  $D$  ნებისმიერი

მუდმივებია.

გ)  $\psi(x) = Lx + M$ , სადაც  $L$  და  $M$  ნებისმიერი მუდმივებია.

2.7. 
$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}; \quad \Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi nx}{a}, & 0 < x < a, \\ 0, & x < 0, x > a \end{cases} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$x = a/2$  წერტილის მიმართ ინვერსიისას ტალღური ფუნქცია ასე გარდაიქმნება:

$$\Psi'_n(x) \equiv \Psi_n(x') = \Psi_n(-x + a) = (-1)^n \Psi_n(x)$$

ანუ გააჩნია გარკვეული  $(-1)^n$  ლუნობა. აქ აღებულია ისეთი ნუმერაცია დონეების, რომ სისტემის ძირითად მდგომარეობას შეესაბამება  $n=1$ . იმავდროულად,  $n-1$  ემთხვევა  $\Psi_n(x)$  ფუნქციის ნულების რიცხვს.

$$2.9. \langle x \rangle = \frac{a}{2}; \langle x^2 \rangle = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2};$$

$$\sigma_x = \langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{a^2}{12} - \frac{a^2}{2\pi^2(n+1)^2};$$

$$\langle p \rangle = 0; \langle p^2 \rangle = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{a^2}; \sigma_p = \langle (\Delta p)^2 \rangle = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}{a^2}.$$

$$2.10. E = \frac{a\hbar^2}{4m} [\psi'(0)]^2.$$

$$2.12. m = \frac{5\pi^2 \hbar^2}{2a^2 \Delta E}.$$

$$2.13. dN = \frac{a}{\pi\hbar} \sqrt{\frac{m}{2E}} dE.$$

$$2.14. \text{ა) } F = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ma^3}; \text{ბ) } A = \frac{(\eta^2 - 1)\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

$$2.15. w = \frac{2}{a} \int_{x_1}^{x_2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) dx = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \approx 0,61.$$

$$2.16. a = \frac{2}{P_m}; E = \frac{(\pi\hbar P_m)^2}{8m}.$$

$$2.17. w = \frac{64}{9\pi^2}.$$

2.19. შეიცვლება მხოლოდ დროითი ნაწილი სრული ტალღური ფუნქციის და რადგანაც ფიზიკური აზრი აქვს მხოლოდ ტალღური ფუნქციის მოდულის კვადრატს, დროითი მამრავლის ცვლილება არ გამოვლინდება.

$$2.20. \Psi(x,t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}, \omega = E/\hbar, k = p/\hbar.$$

2.22.  $\Psi(x,t) = \Psi'(x',t)e^{i(k_0 x - \omega_0 t)}$ ,  $\omega_0 = mv_0^2/2\hbar$ ,  $k_0 = mv_0/\hbar$ . აქ ექსპონენციალური მამრავლი აღწერს ნაწილაკის მოძრაობას  $K'$  სისტემასთან ერთად ( $K$  სისტემის მიმართ).

2.23. აკმაყოფილებს მხოლოდ შრედინგერის დროით განტოლებას.

$$2.24. A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}; \langle x \rangle = \frac{a}{2}; \langle p \rangle = 0; \langle H \rangle = \frac{5\hbar^2}{ma^2}.$$

$$2.25. \langle x \rangle = \frac{a}{2} - \frac{16a}{9\pi^2} \cos\left(3 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2a^2 m} t\right).$$

2.26.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = Be^{-\alpha x}; & x > a \\ \psi_2 = C \sin \beta x + D \cos \beta x; & |x| < a \\ \psi_3 = Fe^{\alpha x}; & x < -a \end{cases} \quad (1)$$

გვაქვს ორი ტიპის ამოხსნები, რომელთა საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებებია:

ა) ლუწი ამოხსნები:  $C = 0; B = F$

$$\beta \operatorname{tg} \beta a = \alpha, \quad (2)$$

სადაც 
$$\alpha = \left(\frac{2m}{\hbar^2}|E|\right)^{1/2} > 0; \beta = \left(\frac{2m}{\hbar^2}(V_0 - |E|)\right)^{1/2} > 0 \quad (3)$$

ბ) კენტი ამოხსნები:  $D = 0; B = -F$

$$\beta \operatorname{ctg} \beta a = -\alpha; \quad (4)$$

(2) და (4) ტრანსცენდენტული განტოლებების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერჯიის დონეებს.

2.28. ა)  $a^2 V_0 = \pi^2 \hbar^2 / 4m;$

ბ)  $a^2 V_0 = \frac{(n-1)^2 \pi^2 \hbar^2}{2m}, n = 2, 3, \dots$

დონეთა რიცხვი განისაზღვრება შემდეგი უტოლობიდან:

$$n > \frac{\sqrt{2ma^2 V_0}}{\pi \hbar} > n-1,$$

ჩვენს შემთხვევაში  $n = 4$

2.29.  $E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{18ma^2}.$

2.30.  $U(x) = \frac{2\alpha^2 \hbar^2 x^2}{m}; E = \frac{\alpha \hbar^2}{m}.$

$$2.31. U(x) = -\frac{\alpha \hbar^2}{mx}; E = -\frac{\alpha^2 \hbar^2}{2m}.$$

2.32.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = Be^{-\alpha x}; & x > a \\ \psi_2 = C \sin \beta x + D \cos \beta x; & 0 < x < a \\ \psi_3 = 0; & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა:

$$\beta \operatorname{ctg} \beta a = -\alpha, \quad (2)$$

სადაც 
$$\alpha = \left( \frac{2m}{\hbar^2} |E| \right)^{1/2} > 0; \beta = \left( \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) \right)^{1/2} > 0 \quad (3)$$

(2) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.33.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = B_1 e^{-\beta_1 x}; & x > a \\ \psi_2 = A \sin(kx + \phi); & 0 < x < a \\ \psi_3 = B_2 e^{\beta_2 x}; & x < 0 \end{cases} \quad (1)$$

სადაც

$$k = \left( \frac{2m}{\hbar^2} E \right)^{1/2}; \beta = \left( \frac{2m}{\hbar^2} (V_{1,2} - E) \right)^{1/2}. \quad (2)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა:

$$n\pi - aq\xi = \arcsin \xi + \arcsin(\xi \cos \gamma), \quad (3)$$

სადაც

$$q = \frac{(2mV_1)^{1/2}}{\hbar}, \xi = \frac{k}{q} = \sqrt{\frac{E}{V_1}}, \cos \gamma = \sqrt{\frac{V_1}{V_2}}; \left( 0 < \gamma < \frac{\pi}{2} \right) \quad (4)$$

(3) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერგიის დონეებს.

2.34.

$$\psi(x) = \begin{cases} A_1 \sin k_1 x; & 0 < x < a \\ A_2 \sin k_2 x + B_2 \cos k_2 x; & a < x < b \\ A_3 (\sin k_3 x - \operatorname{tg} k_3 c \cos k_3 x); & b < x < c \end{cases} \quad (1)$$

სადაც

$$k_i = \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_i) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა:

$$\begin{aligned} k_3 \cos k_3 (c - b) [k_2 \sin k_1 a \cos k_2 (b - a) + k_1 \cos k_1 a \sin k_2 (b - a)] = \\ = k_2 \sin k_3 (c - b) [k_2 \sin k_1 a \sin k_2 (b - a) - k_1 \cos k_1 a \cos k_2 (b - a)] \end{aligned} \quad (3)$$

(3) ტრანსცენდენტული განტოლების ამოხსნის შედეგად ვპოულობთ ენერჯიის ღონეებს.

2.35.

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1 = A \sin k_1 x; & 0 < x < a \\ \psi_2 = A \frac{\sin k_1 a}{\sin k_2 (b - a)} \sin k_2 (b - x); & a < x < b \end{cases} \quad (1)$$

$$\frac{1}{A^2} = \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a} + \frac{2k_2 (b - a) - \sin 2k_2 (b - a)}{2k_2 a \sin^2 k_2 (b - a)} \sin^2 k_1 a \right] \quad (2)$$

$$w_1 = \int_0^a \psi_1^2 dx = \frac{a}{2} \left( 1 - \frac{\sin 2k_1 a}{2k_1 a} \right) A^2; \quad w_2 = 1 - w_1. \quad (3)$$

2.36. ბ)  $l^2 U_0 = \frac{(2n-1)^2 \pi^2 \hbar^2}{8m}$ ; ოთხი ღონე.

2.37. ა)  $\frac{l\sqrt{mU_0}}{\hbar} = \frac{3\pi}{4}$ ; ბ)  $x = \frac{\pi}{2k} = \frac{2l}{3}$ ; გ)  $w = \frac{2}{4+3\pi}$ .

2.39. ბ) შესაბამისად,  $l^2 U_0 < 2,06\hbar^2 / m$  და  $2,06\hbar^2 / m < l^2 U_0 < 12,1\hbar^2 / m$ .

2.41.  $\Psi(x_0 - 0) = \Psi(x_0 + 0)$ ;  $\Psi'(x_0 - 0) = \Psi'(x_0 + 0)$ .

2.42.  $\Psi(x_0 - 0) = \Psi(x_0) = 0$ ;  $\Psi(x > a) = 0$ .

2.43.  $\Delta\Psi'(x_0) = \Psi'(x_0+0) - \Psi'(x_0-0) = \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \Psi(x_0)$ ;  $\Psi(x_0 - 0) = \Psi(x_0 + 0)$ .

2.44. გვაქვს ერთადერთი ღონე:

$$E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}, \quad (1)$$

რომელსაც შეესაბამება ნორმირებული ტალღური ფუნქცია

$$\Psi_0(x) = \sqrt{\lambda_0} \exp[-\lambda_0|x|]; \quad \lambda_0 = \frac{\alpha m}{\hbar^2}. \quad (2)$$

2.45.  $\langle T \rangle = -E_0; \langle U \rangle = 2E_0; \Phi_0(p) = \frac{\sqrt{2\lambda_0^3 \hbar^3}}{\sqrt{\pi}(p^2 + \hbar^2 \lambda_0^2)}.$

2.46. ლუნი ამოხსნება:

$$\Psi(x) = A \sin[k(|x| - a)]; \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0. \quad (1)$$

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$\operatorname{tg}ka = -\frac{k\hbar^2}{m\alpha}. \quad (2)$$

კენტი ამოხსნება:

$$\Psi(x) = B \sin kx. \quad (3)$$

ენერგეტიკული სპექტრი კი არის:

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

2.47. ა)

$$\psi = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}; & (0 \leq x \leq a) \\ Fe^{ikx} & (x > a) \end{cases} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (1)$$

სასაზღვრო პირობებიდან  $k$ -თვის მიღება განტოლება:

$$i \frac{m\alpha}{\hbar^2 k} (e^{2ika} - 1) = 1 \quad (2)$$

და

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (3)$$

ბ) ტალღური ფუნქცია არ არის ნორმალიზებული.

2.48. 
$$E_n = -\frac{me^4}{2\hbar^2 n^2}; \quad n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\psi_n(\xi) = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} \xi^k; \quad \xi = 2x \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}; \quad E < 0 \quad (2)$$

2.49. 
$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

$$\psi_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2} H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right), \quad (2)$$

სადაც  $H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n e^{-z^2}}{dz^n}$  ერმიტის პოლინომებია.

2.50. 
$$E_k = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2.51. 
$$|a_n(p)|^2 \frac{dp}{2\pi\hbar} = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi m\omega\hbar}} e^{-\frac{p^2}{m\omega^2\hbar}} H_n^2\left(\frac{p}{\sqrt{m\omega\hbar}}\right) dp.$$

2.52. 
$$E_k = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega - \frac{e^2 |\vec{E}|^2}{2m\omega^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n = C_n e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi); \quad \xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(x - \frac{e|\vec{E}|}{m\omega^2}\right).$$

2.53. ა)  $\psi_0$  მდგომარეობა ლუწია,  $\psi_1$  კი - კენტი. ორივე მდგომარეობაში  $\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0$

$\psi_0 (n=0)$ -ში გვაქვს:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}; \quad \langle p^2 \rangle = \frac{m\hbar\omega}{2}.$$

$\psi_1 (n=1)$ -ში გვაქვს:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{3\hbar}{2m\omega}; \quad \langle p^2 \rangle = \frac{3m\hbar\omega}{2}.$$

ბ)  $\psi_0 (n=0)$ -ში გვაქვს:

$$\sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}, \quad \text{სადაც } \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2; \quad \sigma_p^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$$

$\psi_1 (n=1)$ -ში გვაქვს:

$$\sigma_x \sigma_p = 3\frac{\hbar}{2} > \frac{\hbar}{2}.$$



$$\delta) \langle T \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \hbar \omega, & n=0 \\ \frac{3}{4} \hbar \omega, & n=1 \end{cases} \quad \langle V \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} \hbar \omega, & n=0 \\ \frac{3}{4} \hbar \omega, & n=1 \end{cases}$$

$$2.54. \langle x^2 \rangle_n = \frac{\hbar}{m\omega} \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad \langle V \rangle_n = \frac{\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right)}{2} = \frac{E_n}{2}.$$

$$2.55. \langle T_3 \rangle = \frac{1}{2} \hbar \omega \left( 3 + \frac{1}{2} \right).$$

$$2.56. \hat{H} = \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) = \hbar\omega \left( \hat{a} \hat{a}^+ - \frac{1}{2} \right).$$

$$2.58. E_n = \langle \psi_n | \hbar\omega \left( \hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right) | \psi_n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right).$$

2.59. 2.57 ამოცანის შედეგის თანახმად:

$$\hat{a} \psi_0 = 0, \tag{1}$$

საიდანაც

$$\psi_0 = C_0 e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2} \tag{2}$$

ნებისმიერი  $n$  მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას მიიღებთ, თუ (2) ფუნქციაზე  $n$ -ჯერ იმოქმედებთ  $\hat{a}^+$  გაჩენის ოპერატორით და კვლავ გამოიყენებთ 2.57 ამოცანის შედეგს  $\hat{a}^+ \psi_n = \sqrt{n+1} \psi_{n+1}$ .

$$2.65. H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi; \quad H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12;$$

$$H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi; \quad H_6(\xi) = 64\xi^6 - 480\xi^4 + 720\xi^2 - 120;$$

$$2.66. H_0(\xi) = 1; H_1(\xi) = 2\xi; H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$$

$$2.67. \psi = C e^{i \frac{P X_c}{\hbar}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_n(\xi), \text{ სადაც } \xi = \sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}} \text{ და } \mu = \frac{m_1 m_2}{M},$$

$$E = \frac{P^2}{2(m_1 + m_2)} + \left( n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$2.68. \quad \langle n|x|k \rangle = \begin{cases} i\sqrt{\frac{m\omega\hbar n}{2}}; & k = n-1 \\ -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar(n+1)}{2}}; & k = n+1 \end{cases};$$

ყველა სხვა შემთხვევაში  $\langle n|x|k \rangle = 0$

$$\langle n|p|k \rangle = \begin{cases} i\sqrt{\frac{m\omega\hbar n}{2}}; & k = n-1 \\ -i\sqrt{\frac{m\omega\hbar(n+1)}{2}}; & k = n+1 \end{cases}$$

ყველა სხვა შემთხვევაში  $\langle n|p|k \rangle = 0$ .

$$2.69. \quad E_n = -A \left[ 1 - \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2mA}} \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2; \quad (1)$$

(1)-ში  $n$  ნულიდან დანყებული ლებულობს მთელ დადებით მნიშვნელობებს იმ მაქსიმალურ მნიშვნელობამდე, რომლის დროსაც ჯერ კიდევ

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} > n + \frac{1}{2} \quad (2)$$

ანუ დისკრეტული სპექტრი შეიცავს დონეების სასრულ რაოდენობას.

როცა

$$\frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} < \frac{1}{2} \quad (3)$$

დისკრეტული სპექტრი საერთოდ არ არსებობს.

ტალღური ფუნქციაა

$$\psi = e^{-\frac{\xi}{2}} \xi^s F(-n, 2s+1, \xi), \quad (4)$$

სადაც

$$s = \frac{\sqrt{-2mE}}{\alpha\hbar}; \quad n = \frac{\sqrt{2mA}}{\alpha\hbar} - \left( s + \frac{1}{2} \right), \quad (5)$$

ხოლო  $F$  გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

2.70. ტალღური ფუნქციაა:

$$\psi = (1 - \xi^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} F\left[\varepsilon - s, \varepsilon + s + 1, \varepsilon + 1; \frac{1 - \xi}{2}\right], \quad (1)$$

სადაც

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar\alpha}; \quad \frac{2mU_0}{\alpha^2\hbar^2} = s(s+1); \quad s = \frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right), \quad (2)$$

ხოლო  $F$  ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

$$E_n = -\frac{\hbar^2\alpha^2}{8m}\left[-(1+2n) + \sqrt{1 + \frac{8mU_0}{\alpha^2\hbar^2}}\right]^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

არსებობს სასრული რაოდენობა დონეებისა, რომლებიც განისაზღვრება პირობიდან  $\varepsilon > 0$  ანუ  $n < s$

$$2.71. \quad E_{2n} = \frac{V_0}{\lambda(\lambda-1)}(\lambda+2n)^2; \quad E_{2n+1} = \frac{V_0}{\lambda(\lambda-1)}(\lambda+2n+1)^2; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_{2n} = \cos^\lambda \alpha x F\left(\lambda + n, -n, \frac{1}{2}; \sin^2 \alpha x\right);$$

$$\psi_{2n+1} = \cos^\lambda \alpha x \sin \alpha x F\left(\lambda + n + 1, -n, \frac{3}{2}; \sin^2 \alpha x\right)$$

სადაც  $F$  ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

$$2.72. \quad E_n = \frac{\hbar^2\alpha^2}{2m}(\eta + \lambda + 2n)^2 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n = \sin^\eta \alpha x \cos^\lambda \alpha x F\left(\eta + \lambda + n, -n, \eta + \frac{1}{2}; \sin^2 \alpha x\right),$$

სადაც  $F$  ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

2.73. ენერგია განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$\sqrt{-E_n} + \sqrt{U_1 - U_2 - E_n} = \sqrt{U_1 + \frac{\hbar^2}{8ma^2}} - \sqrt{\frac{\hbar^2}{2ma^2}}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi = c \frac{1}{(1-z)^\varepsilon} z^\mu F(\alpha, \beta, \gamma, z),$$

სადაც  $\alpha = \mu - \varepsilon + \eta\alpha$ ;  $\beta = \mu - \varepsilon - \eta\alpha$ ;  $\eta = (-2mE/\hbar^2)^{\frac{1}{2}}$ ;  $\gamma = 1 + 2\mu$ , ხოლო  $F$  ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

2.74. ენერგეტიკული სპექტრი უწყვეტია, ხოლო ტალღური ფუნქციაა  $\psi(\xi) = B Ai(-\xi)$ , სადაც  $Ai(z)$  ე.წ. ეირის ფუნქციაა.

$$2.75. \psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar F}} \exp\left\{\frac{i}{\hbar F}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)\right\}.$$

$$2.76. \Psi(z) = B Ai\left[\left(z - \frac{E}{mg}\right)\left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{1/3}\right], \text{ სადაც } Ai(z) \text{ ე.წ. ეირის ფუნქციაა.}$$

$$E_n = \left(\frac{mg^2 \hbar^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \alpha_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

სადაც  $\alpha_{n+1}$  ეირის ფუნქციის ნულეებია.

$$2.77. E_n = \frac{2\hbar}{a} \sqrt{\frac{2V_0}{m}} \left\{ n + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{8mV_0 a^2}{\hbar^2} + 1} - \sqrt{\frac{8mV_0 a^2}{\hbar^2}} \right) \right\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_n = C_n x^\nu e^{-\sqrt{\frac{mV_0}{2\hbar^2 a^2}} x^2} F\left(-n, \nu + \frac{1}{2}; \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2 a^2}} x^2\right),$$

სადაც  $F$  გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

$$2.78. E_n = (n^2 + 4n\lambda - 2\lambda) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\psi_n = c_n \left(\sin \frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda} F\left(-\frac{n}{2} - 2\lambda, \frac{n}{2}, \frac{1}{2}; \cos^2 \frac{\pi x}{a}\right); \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\psi_n = c_n \left(\sin \frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda} \cos \frac{\pi x}{a} F\left(-\frac{n}{2} - 2\lambda + \frac{1}{2}, \frac{n}{2} + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; \cos^2 \frac{\pi x}{a}\right); \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

$$2.79. \langle E \rangle = \sqrt{\frac{k}{2M}} \hbar; \quad |\langle P_x \rangle| = \frac{\sqrt{\hbar} \sqrt{\mu k}}{\sqrt{\pi}}.$$

**2.2. უწყვეტი სპექტრის მდგომარეობები. პოტენციურ ბარიერებში ნაწილაკის გასვლა**

$$2.80. W(x) = 4a^2 \sin^2 kx; \quad x_n = \frac{\pi \hbar n}{\sqrt{8mE}}; \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$2.81. x_{eff} = \frac{1}{2\eta}; \quad \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}. \quad \text{ელექტრონისათვის } x_{eff} \approx 0,1 \text{ ნმ.}$$

2.82. ბ)  $W(x \leq 0) = 2a^2(1 - \sin 2kx); k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

$$W(x \geq 0) = 2a_1^2 e^{-2\eta x}; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$

2.83.  $R = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}; k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; k_2 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar};$

$$D = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}.$$

2.86. ა)  $R \approx 1 - 4\sqrt{\frac{E}{U_0}}; ბ) R \approx \left(\frac{U_0}{4E}\right)^2.$

2.87. ა)  $D = \left(1 + \frac{U_0 \sin^2 k_0 l}{4E(E + U_0)}\right)^{-1}; k_0 = \frac{\sqrt{2m(E + U_0)}}{\hbar};$

ბ)  $D \approx 0,95.$

2.88.  $E = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} - U_0$ , სადაც  $n$  ისეთი მთელი რიცხვია, რომელთათვისაც

$$E > 0. E_{\min} = 14 \text{ ევ}. (n = 2).$$

2.89.  $l = \frac{(2n+1)\pi\hbar}{\sqrt{8m(E + U_0)}}.$

2.90. ა)  $D = \left(1 + \frac{U_0 \sin^2 k_0 l}{4E(E - U_0)}\right)^{-1}; k_0 = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}.$  როცა  $E \rightarrow U_0$ , მაშინ

$$D = \left(1 + \frac{ml^2 U_0}{2\hbar^2}\right)^{-1}.$$

ბ)  $D = 1$  როცა  $E = \frac{\pi^2 n^2 \hbar^2}{2ml^2} + U_0$  და  $E_1 = 11,5 \text{ ევ}, E_2 = 16 \text{ ევ}.$

2.91. ა)  $D = \left(1 + \frac{U_0 s \hbar^2 \eta l}{4E(U_0 - E)}\right)^{-1}; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}$

ბ)  $D \ll 1$ , როცა  $\eta l \gg 1$  და ამ შემთხვევაში

$$D \approx 16 \frac{E}{U_0} \left(1 - \frac{E}{U_0}\right) \exp\left(-2l\sqrt{2m(U_0 - E)} / \hbar\right)$$

გ) ელექტრონებისათვის  $D \approx 0,27$ , პროტონებისათვის  $D \approx 10^{-47}$ .

2.92.

$$\frac{W(0)}{W(l)} = \frac{e^{2\eta l} + e^{-2\eta l}}{2}; \eta = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}.$$

$$2.93. R = \left( \frac{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} (k_1 - k_2)}{\operatorname{sh} \frac{\pi}{\alpha} (k_1 + k_2)} \right)^2; k_1 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}, k_2 = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(E - U_0)}.$$

$E = U_0$ -თვის  $R = 1$ , ხოლო  $E \rightarrow \infty$ -თვის ნულისაკენ მიისწრაფვის შემდეგი კანონით:

$$R = \left( \frac{\pi U_0}{\alpha \hbar} \right)^2 \frac{2m}{E} e^{-\frac{4\pi}{\alpha \hbar} \sqrt{2mE}},$$

ხოლო კლასიკურ ზღვარში  $R \rightarrow 0$ , როგორც მოსალოდნელი იყო.

$$2.94. R = \left( \frac{\operatorname{sh} \pi \alpha (\eta - k)}{\operatorname{sh} \pi \alpha (\eta + k)} \right)^2; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \eta = \frac{\sqrt{2m(E + V_0)}}{\hbar}.$$

$$2.95. D = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k}{\alpha}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k}{\alpha} + \cos^2 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{1 - \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2}} \right)}; \text{როცა } \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} < 1$$

$$D = \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k}{\alpha}}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi k}{\alpha} + \operatorname{ch}^2 \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} - 1} \right)}; \text{როცა } \frac{8mU_0}{\hbar^2 \alpha^2} > 1.$$

2.96.  $D \approx E$

$$2.97. R = |A|^2; A = \frac{m\alpha}{ik\hbar^2 - m\alpha}. \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$$

$$D = |B|^2; B = \frac{ik\hbar^2}{ik\hbar^2 - m\alpha}.$$

2.98. ენერგია, რომლის დროსაც ნაწილაკი არ აირეკლება ბარიერიდან, განისაზღვრება შემდეგი განტოლებიდან:

$$\operatorname{tg} \kappa a = -\frac{k\hbar^2}{\alpha m}; \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$$

### 2.3. თავისუფლების რამდენიმე ხარისხის მქონე სისტემები

$$2.99. E_{n_1 n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right) \quad n_{1,2} = 1, 2, 3, \dots$$

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{ab}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{a} y\right)$$

$$2.100. W = \left( \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \right)^2 = 0,038$$

$$2.101. E = 2, 5, 8, 10, \quad \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \text{ ერთეულებში.}$$

$$2.102. dN = \frac{ab}{2\pi\hbar^2} dE$$

$$2.103. E = \frac{\pi^2 \hbar^2 P_m}{4m}$$

$$2.104. E_n = -\frac{me^4 Z^2}{2\hbar^2 \left( n + |m| + \frac{1}{2} \right)^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad |m| = 0, 1, 2, \dots$$

$$\psi_{nm}(\rho, \varphi) = e^{im\varphi} \frac{1}{\sqrt{\rho}} e^{-\gamma \frac{\rho}{a}} \left( \frac{\rho}{a} \right)^{|m| + \frac{1}{2}} \sum_{k=0}^n a_k \left( \frac{\rho}{a} \right)^k$$

$$2.105. \psi_{n_1 n_2}(x, y) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y)$$

$$E_N = \hbar\omega(N+1); \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

სადაც  $\psi_{n_1}(x)$  და  $\psi_{n_2}(y)$  ერთგანზომილებიანი ოსცილატორების ამონახსნებია,

$$\text{ხოლო } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad N = n_1 + n_2; \quad n_{1,2} = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.106. E_{n_1 n_2} = \hbar \sqrt{\frac{k + \alpha}{m}} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \sqrt{\frac{k - \alpha}{m}} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right); \quad n_{1,2} = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.107. E_{n_1 n_2} = \hbar \sqrt{\frac{k_1}{m}} \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \sqrt{\frac{k_2}{m}} \left( n_2 + \frac{1}{2} \right); \quad n_{1,2} = 0, 1, 2, \dots$$

$$2.108. E_{n_1 n_2 n_3} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right); \quad n_{1,2,3} = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin\left(\frac{\pi n_1}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi n_2}{a} y\right) \sin\left(\frac{\pi n_3}{a} z\right).$$

$$2.109. E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2); \quad \Delta E_{34} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{ml^2}.$$

$$2.110. dN = \frac{abc m^{3/2}}{\sqrt{2} \pi^2 \hbar^3} \sqrt{E} dE.$$

$$2.111. E_{n_1 n_2} = \hbar \omega \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_1 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right), \text{ სადაც } \omega = \sqrt{\frac{k}{2m}} \text{ და } \omega_1 = \sqrt{\frac{k + 2k_1}{m}}$$

$$\Psi_{n_1 n_2} = C e^{-\frac{\xi^2}{2}} H_{n_1}(\xi) e^{-\frac{u^2}{2}} H_{n_2}(u), \text{ სადაც } H_n \text{ ერმიტის პოლინომებია, ხოლო}$$

$$\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} X_C \text{ და } u = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_1}} x$$

### თავი 3. იმპულსის მომენტი

$$3.1. \text{ ა) } L_z = m\hbar; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$\text{ბ) } L_z^2 = m^2 \hbar^2; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad \psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}$$

$$3.10. [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$$

$$3.11. [\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$$

3.14. ა) ყველა კომუტატორი ნულია

ბ) ყველა კომუტატორი ტოლია  $[\hat{l}_i, \hat{f}_k] = i\epsilon_{ikl} \hat{f}_l$ , სადაც  $\hat{f}_k$  ოპერატორი არის  $k$ -ური პროექცია შესაბამისი ვექტორული ოპერატორისა.

გ)  $[\hat{l}_i, \hat{f}_k] = i(\epsilon_{ikp} \delta_{kp}) \hat{f}_{pn}$ , სადაც  $\hat{f}_{ik}$  ოპერატორი არის შესაბამისი მეორე რანგის ტენზორის კომპონენტი.



$$3.20. \Psi_{r_0lm} = \frac{1}{r_0} \delta(r - r_0) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

3.21.  $\Psi_{p,m}(\vec{r}) = (2\pi\hbar)^{-1/2} e^{ip_z z/\hbar} (2\pi)^{-1/2} e^{im\varphi} f(\rho)$ , სადაც  $f(\rho)$  ნებისმიერი ფუნქციაა  $\rho$  ცვლადის ცილინდრულ კოორდინატთა სისტემაში.

3.22. არ შეიძლება.

$$3.23. \langle l_z^2 \rangle = \frac{4\hbar^2}{3}.$$

$$3.25. A_l^m = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}.$$

$$3.27. \langle \hat{l}_x^2 \rangle = \langle \hat{l}_y^2 \rangle = [l(l+1) - m^2]/2.$$

$$3.28. \langle l_z^2 \rangle = \frac{4\hbar^2}{3}.$$

$$3.29. \langle (\Delta\varphi)^2 \rangle = \langle \varphi^2 \rangle - \langle \varphi \rangle^2 = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2}; \langle (\Delta L_z)^2 \rangle = \langle L_z^2 \rangle = \hbar^2.$$

$$3.31. \langle L^2 \rangle = 2\hbar^2.$$

თავი 4. მოძრაობა სფერულ სიმეტრიის ველში

#### 4.1. დისკრეტული სპექტრის მდგომარეობები

$$4.1. E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mr_0^2} n^2; \quad \psi_n(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} \frac{\sin kr}{r}.$$

$$4.2. r_{\max} = r_0/2; \quad W = 1/2.$$

$$4.3. \langle r \rangle = r_0/2; \quad \langle r^2 \rangle = \frac{r_0^2}{3} \left( 1 - \frac{3}{2\pi^2 n^2} \right);$$

$$\langle (r - \langle r \rangle)^2 \rangle = \langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2 = \frac{r_0^2}{12} (1 - 6/\pi^2 n^2).$$

$$4.4. R_1(r) = R_0'(r) = \frac{A}{r^2} [kr \cos kr - \sin kr], \text{ სადაც } A \text{ ნორმირების მუდმივაა.}$$

4.5. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა  $tgkr_0 = kr_0$ , რომლის მინიმალური ამონახსნია  $kr_0 = 4,5$ , საიდანაც  $E_{1p} \approx 10\hbar^2 / mr_0^2 = 2E_1$ .

4.6. ა)  $\sin kr_0 = \pm \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} U} kr_0$ .

ბ)  $\frac{\pi^2 \hbar^2}{8m} < r_0^2 U_0 < \frac{9\pi^2 \hbar^2}{8m}$ .

4.7.  $r_{\max} = \frac{3r_0}{4}$ ;  $W = 0,34$ .

4.8. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა

$$\frac{\hbar^2 \eta}{m\alpha} = 1 - e^{-2\eta a}, \quad \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n_r,0}}{\hbar^2}}. \quad (1)$$

(1) განტოლებას  $\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} < 1/2$ -თვის არ გააჩნია ფესვები და ამიტომ არ არსებობს ბმული მდგომარეობა, ხოლო, როცა  $\xi \Rightarrow 1/2$ , მაშინ გვაქვს მხოლოდ ერთი დონე.

4.9. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა:

$$J_{2\eta a} \left( \sqrt{\frac{8mU_0 a^2}{\hbar^2}} \right) = 0; \quad \eta = \sqrt{-\frac{2mE_{n_r,0}}{\hbar^2}},$$

სადაც  $J_{2\eta a}(x)$  ბესელის ფუნქციაა.

4.10.  $E_{n_r,0} = -\frac{\hbar^2}{8ma^2(n_r+1)^2} [\lambda^2 - (n_r+1)^2]^2$ , სადაც  $n_r = 0,1,2,\dots, n_r < \lambda - 1$ ;

$$\lambda = \left( \frac{2ma^2 U_0}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

4.11. ა)  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ; ბ) ნაწილაკი თავისუფალია.

4.12.  $\chi_{n_r,l}(r) = C J_{l+1/2}(\eta_{n_r,l} r)$ , სადაც  $J_{l+1/2}(x)$  ბესელის ფუნქციაა.

$$E_{n_r,l} = \frac{\hbar^2 \alpha_{n_r,l}^2}{2m a^2},$$

სადაც  $\alpha_{n,l} > 0$ , ნებისმიერი  $n$  ნულია (ზრდის მიხედვით,  $x=0$  წერტილში ნულის ჩაუთვლელად)  $J_{l+1/2}(x)$  ბესელის ფუნქციისა, ანუ  $J_{l+1/2}(\alpha_{n,l}) = 0$ . კერძოდ, ძირითად მდგომარეობას ( $n_r=0, l=0$ ) შეესაბამება  $\alpha_{1,0} = \pi \left( J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \right)$ .

$$4.13. dW = \frac{a\hbar^3}{p^2} \frac{\sin^2(pa/\hbar)}{(\pi^2\hbar^2 - p^2 a^2)^2} d\bar{p}$$

4.14. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$E_{n,l} = -\frac{\hbar^2 \eta_{n,l}^2}{2m} < 0.$$

დისკრეტული დონეების პოვნის პირობა ნებისმიერი  $l$ -თვის შემდეგი პირობით მოიცემა:

$$\frac{ma\alpha}{\hbar^2} - \frac{1}{2} < N < \frac{ma\alpha}{\hbar^2} + \frac{1}{2},$$

სადაც  $N$  დისკრეტული სპექტრის დონეების რიცხვია.

$$4.15. \text{ ა) } R(r) \approx \frac{1}{r} e^{-\eta r}; \eta = \frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}; \text{ ბ) } R(r) \approx r^l.$$

$$4.16. \text{ ა) } a = \alpha = -\frac{1}{2r_1}, \text{ სადაც } r_1 = \frac{\hbar^2}{me^2} \text{ ბორის პირველი რადიუსია.}$$

$$\text{ ბ) } A = \frac{1}{\sqrt{8\pi r_1^3}}$$

$$4.17. \text{ ა) } \langle r^n \rangle = \frac{(n+2)!}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^n \text{ ბ) } \langle T \rangle = \frac{e^2}{2a}; \langle U \rangle = -\frac{e^2}{a}.$$

$$4.18. j_r = j_\theta = 0; j_\phi = \frac{\hbar m}{\mu r \sin \theta} |\psi_{nlm}|^2.$$

$$4.19. E_{n_1 n_2} = \hbar \omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2 n_1^2 \pi^2}{8ma^2} + \frac{\hbar^2 n_2^2 \pi^2}{8mb^2}; A^2 = \frac{4}{ab} \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar \pi}} \frac{1}{2^n n!};$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$n_{1,2} = 1, 2, \dots$$

4.21. ტალღური ფუნქციაა  $\psi = F(R_C) \Phi(r)$ , სადაც  $F = e^{i \frac{\bar{P} R_C}{\hbar}}$  და  $\Phi(r)$  წყალბადის ატომის ტალღური ფუნქციაა ბირთვის მოძრაობის გაუთვალისწინებლად:

$$E_{n, \bar{P}} = \frac{\bar{P}^2}{2(m+M)} - \frac{\mu e^4}{2\hbar^2 n^2}.$$

(1)-ში  $\bar{P}$  უწყვეტი ცვლადია,  $\mu = \frac{mM}{m+M}$  დაყვანილი მასაა, ხოლო  $m$  და

$M$  ელექტრონის და ბირთვის მასებია.

$$4.22. g_{10}(p) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4p}{(1+p^2)^2}; \quad g_{20}(p) = \frac{32}{\sqrt{\pi}} \frac{p(1-4p^2)}{(1+4p^2)^3};$$

$$g_{21}(p) = -i \frac{128}{\sqrt{3\pi}} \frac{p^2}{(1+4p^2)^3}.$$

$$4.24. \text{ ა) } \rho_1 = 3 - \sqrt{5} \approx 0,76; \quad \rho_2 = 3 + \sqrt{5} \approx 5,24; \quad \text{ ბ) } \rho_2 = 2.$$

$$4.26. W = 0,01.$$

$$4.27. E_{n_1 n_2 n_3} = \hbar \omega_1 \left( n_1 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_2 \left( n_2 + \frac{1}{2} \right) + \hbar \omega_3 \left( n_3 + \frac{1}{2} \right); \quad n_{1,2,3} = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m} \quad (i = 1, 2, 3, \dots).$$

$$4.28. \Psi_{n_1 n_2 n_3}(x, y, z) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y) \psi_{n_3}(z); \quad n_{1,2,3} = 0, 1, 2, \dots,$$

სადაც  $\psi_{n_i}(x_i); i = 1, 2, 3$  II თავში განხილული ერთგანზომილებიანი ოსცილატორული ტალღური ფუნქციებია.

$$E_N = \hbar \omega(N + 3/2); \quad N = n_1 + n_2 + n_3; \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

დონეების გადაგვარების ჯერადობა ტოლია:

$$G(N) = \frac{(N+1)(N+2)}{2}$$

$$4.29. E_{n_r, l} = \hbar \omega(l + 2n_r + 3/2) = \hbar \omega(N + 3/2); \quad N = 2n_r + l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_{n_r, l, m}(r, \theta, \varphi) = Cr^l \exp(-m\omega r^2 / 2\hbar) F(-n_r, l + 3/2, m\omega r^2 / \hbar) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

სადაც  $F$  გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციაა.

$$4.31. E_p = -\frac{2B^2 m}{\hbar^2} \left[ 2p + 1 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}} \right]^{-2}; \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

$$4.32. E_n = \hbar \sqrt{\frac{B}{2m}} \left[ 4n + 2 + \sqrt{(2l+1)^2 + \frac{8mA}{\hbar^2}} \right]; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

4.33. საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებაა:

$$\frac{kR}{\eta R} = -\operatorname{tg} \left[ kR - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \operatorname{arctg} \frac{2ka}{n} - 2 \operatorname{arctg} \frac{ka}{n + \eta a} \right) \right],$$

სადაც

$$k = \left[ \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - |E|) \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \eta = \left[ \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$a \ll R$  ზღვარში შედარებით მარტივდება.

4.34. მე- $N$ -დონის გაჩენის პირობაა

$$\text{ა) და ბ)-თვის } \frac{m\alpha}{\hbar^2 a^2} = \frac{\pi^2 N^2}{2}; \quad \text{ბ) } \sqrt{1 + \frac{2mU_0 a^2}{\hbar^2}} = 2N.$$

4.35. მე- $N$  დონის გაჩენის პირობაა:

$$\text{ა) } \frac{2}{s-2} \left( \frac{2m\alpha}{\hbar^2 a^{s-2}} \right)^{\frac{1}{2}} = x_{\nu N}; \quad \nu = \frac{1}{s-2}, \quad \text{სადაც } x_{\nu N} \text{ არის } J_{\nu}(x) \text{ ბესელის}$$

ფუნქციის მე- $N$  ნული.

$$\text{ბ) } 2(\nu+1) \left( \frac{2m\alpha a^{2-s}}{\hbar^2} \right)^{\frac{1}{2}} = x_{\nu N}; \quad \nu = -1 + \frac{1}{2-s}, \quad \text{სადაც } x_{\nu N} \text{ არის } J_{\nu}(x)$$

ბესელის ფუნქციის მე- $N$  ნული.

4.36. ა) ერთადერთი  $l$  მომენტის მქონე გაჩენის პირობაა:

$$\frac{2m\alpha a}{\hbar^2} = 2l + 1$$

$$\text{ბ) } \frac{\sqrt{2m\alpha/\hbar^2}}{a} = x_{l+1/2, N}, \quad \text{სადაც } x_{l+1/2, N} \text{ არის } J_{l+1/2}(x) \text{ ბესელის ფუნ-}$$

ქციის მე- $N$  ნული.

## 4.2. აქსიალური სიმეტრიის მქონე სისტემები

$$4.40. \quad \Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I}.$$

ძირითადის გარდა, ყველა დონე ორჯერადადაა გადაგვარებული.

$$4.41. W(m) = \frac{n!}{2^n (2n-1)!!} \left[ C_n^{\frac{n-m}{2}} \right]^2, \quad m = n, n-2, \dots, -n$$

$$W(E_m) = 2W(m)$$

$$\langle m \rangle = 0; \quad \langle E \rangle = \frac{n^2 \hbar^2}{2I(2n-1)}.$$

4.42.  $E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I}$ ;  $\Psi_{lm}(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi)$ ;  $l = 0, 1, \dots$ ;  $m = l, l-1, \dots, -l$  ძირითადის გარდა, ყველა დონე  $2l+1$ -ჯერაა გადაგვარებული.

4.43. როტატორის მომენტმა მხოლოდ ორი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს  $l=0$  და  $l=2$  შემდეგი ალბათობებით:

$$W(l=0) = 5/9; \quad W(l=2) = 4/9; \quad \langle E \rangle = \frac{4\hbar^2}{3I}$$

4.44.  $\Psi_{n_1 n_2}(x, y) = \psi_{n_1}(x) \psi_{n_2}(y)$ ;  $n_{1,2} = 0, 1, 2, \dots$ , სადაც  $\psi_{n_i}(x_i)$ ;  $i = 1, 2$  II თავში განხილული ერთგანზომილებიანი ოსცილატორული ტალღური ფუნქციებია.

$$E_N = \hbar \omega (N+1); \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad N = n_1 + n_2; \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

დონეების გადაგვარების ჯერადობაა  $N+1$ .

4.45. იმპულსის მომენტის პროექციამ მხოლოდ ორი მნიშვნელობა შეიძლება მიიღოს  $m = \pm 2$  ერთი და იგივე  $W = 1/2$  ალბათობით.

$$4.46. E_{n_\rho |m| p_z} = E_{n_\rho |m|} + \frac{p_z^2}{2m};$$

$$\Psi_{n_\rho m p_z} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 \hbar}} \exp \left[ i \left( \frac{p_z z}{\hbar} + m \varphi \right) \right] \psi_{n_\rho |m|}(\rho),$$

სადაც  $E_{n_\rho |m|}$  და  $\psi_{n_\rho |m|}(\rho)$ , შესაბამისად, „განივი“ მოძრაობის ენერგია და ტალღური ფუნქციაა.

$$4.47. E_{n_\rho |m|} = \frac{\hbar^2 \alpha_{n_\rho+1}^2}{2ma^2}, \quad \text{სადაც } \alpha_{km} > 0 \text{ ბესელის } J_m(x) \text{ ფუნქციის } k\text{-ური}$$

ნულია  $J_m(\alpha_{km}) = 0$ .

$$\psi_{n_\rho|m}(\rho) = C J_m(\eta_{n_\rho|m} \rho) ; \quad \eta_{n_\rho|m} = \sqrt{\frac{2mE_{n_\rho|m}}{\hbar^2}}$$

4.48.

$$\chi_{n_\rho m}(\rho) = \begin{cases} C_1 J_{|m|} \left( \sqrt{2\mu(U_0 - |E_{n_\rho|m}|)} / \hbar^2 \rho \right); & \rho < a \\ C_2 K_{|m|} \left( \sqrt{2\mu|E_{n_\rho|m}|} / \hbar^2 \rho \right); & \rho > a \end{cases} \quad (1)$$

სადაც  $J_m(x)$  და  $K_m(x)$ , შესაბამისად, ბესელის და მაკდონალდის ფუნქციებია.

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$\begin{aligned} & \sqrt{|E_{n_\rho|m}|} J_{|m|} \left( \sqrt{2\mu(U_0 - |E_{n_\rho|m}|)} a^2 / \hbar^2 \right) \times K'_{|m|} \left( \sqrt{2\mu|E_{n_\rho|m}|} a^2 / \hbar^2 \right) = \\ & = \sqrt{U_0 - |E_{n_\rho|m}|} \times J'_{|m|} \left( \sqrt{2\mu(U_0 - |E_{n_\rho|m}|)} a^2 / \hbar^2 \right) \times K_{|m|} \left( \sqrt{2\mu|E_{n_\rho|m}|} a^2 / \hbar^2 \right) \end{aligned} \quad (2)$$

მცირე სიღრმის  $\xi = \frac{ma^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1$  ორმოს შემთხვევაში გვაქვს ერთადერთი დონე:

$$E_{00} \approx -2U_0 \xi^{-1} \exp\left(-\frac{2}{\xi}\right) \quad (3)$$

4.49. მცირე სიღრმის  $\frac{ma^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1$  ორმოს შემთხვევაში  $m \neq 0$ -თვის არ გვაქვს დონეები. დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობაა:

$$J_{|m|-1}(\sqrt{2\xi}) = 0 ; \quad \xi = \frac{ma^2 U_0}{\hbar^2} \ll 1$$

4.50.

$$\chi_{n_\rho m}(\rho) = \begin{cases} C_1 I_m(\eta_{n_\rho m} \rho); & \rho < a \\ C_2 K_m(\eta_{n_\rho m} \rho); & \rho > a \end{cases} ; \quad \eta_{n_\rho m} = \sqrt{2\mu|E_{n_\rho|m}|} / \hbar^2 , \quad (1)$$

სადაც  $I_m(x)$  და  $K_m(x)$ , შესაბამისად, მოდიცირებული ბესელის და მაკდონალდის ფუნქციებია.

საკუთარი მნიშვნელობების განტოლება:

$$K_m(\eta_{n_\rho m} a) I_m(\eta_{n_\rho m} a) = \frac{\hbar^2}{2\mu\alpha a} \quad (2)$$

მცირე სიჩქარის ორმოში  $\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \ll 1$  გვაქვს დონე:

$$E_{00} \approx -\frac{2\hbar^2}{\mu a^2} e^{-\frac{1}{\xi}}, \quad (3)$$

სოლო ღრმა ორმოში  $\xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \gg 1$  გვაქვს დონე:

$$E_{00} \approx -\frac{\mu\alpha^2}{\mu\hbar^2}. \quad (4)$$

4.51. დისკრეტული სპექტრის არსებობის პირობაა:

$$\frac{\mu\alpha a}{\hbar^2} > |m|.$$

### თავი 5. მდგომარეობის სვლილება დროში

$$5.6. \hat{v} = \frac{1}{m} \left( \hat{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)$$

$$5.7. \hat{w} = \hat{v} = \frac{e}{m} \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{e}{2cm} \{ [\hat{v}\vec{H}] - [\vec{H}\hat{v}] \}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}; \quad \vec{H} = \text{rot} \vec{A}$$

$$5.12. \frac{d}{dt} \int_V |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV = -\oint_S \vec{j} d\vec{s} + \frac{2}{\hbar} \int_V U_1(\vec{r}) |\Psi(\vec{r}, t)|^2 dV. \quad (1)$$

(1)-დან ჩანს, რომ  $U_1 > 0$  ხდება ნაწილაკების რიცხვის გაზრდა, ხოლო  $U_1 < 0$ -თვის - კლება.

$$5.13. \Psi(x, t) = \frac{A}{4} \exp\left(-\frac{i\hbar\pi^2 t}{2ma^2}\right) \left\{ 3 \sin \frac{\pi x}{a} - \exp\left(-\frac{4i\hbar\pi^2 t}{ma^2}\right) \sin \frac{3\pi x}{a} \right\};$$

$T = \frac{ma^2}{2\pi\hbar}$  დროის შემდეგ სისტემა სანყის მდგომარეობას უბრუნდება.

$$5.14. \Psi(\varphi, t) = \frac{A}{2} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{2i\hbar t}{I}\right) \cos 2\varphi \right]$$

$T = \frac{\pi I}{\hbar}$  დროის შემდეგ როტატორი სანყის მდგომარეობას უბრუნდება.



$$5.15. \Psi(\theta, t) = \frac{A}{3} \left\{ 1 + (3 \cos^2 \theta - 1) \exp\left(-\frac{3i\hbar t}{I}\right) \right\},$$

$T = \frac{2\pi I}{3\hbar}$  დროის შემდეგ როტატორი სანყის მდგომარეობას უბრუნდება.

5.16.

$$\Psi(x, t) = A \left[ 1 + \frac{i\hbar}{ma^2} \right]^{-1/2} \exp \left[ \frac{-ma^2\hbar^2(x - v_0 t)^2 + i\hbar^3 x^2 t + ia^4 m^2 v_0 \hbar (2x - v_0 t)}{2m(a^4 \hbar^2 + t^2 \hbar^4 / m^2)} \right]$$

$$|A|^2 = (\pi a^2)^{-1/2}; \quad \langle x(t) \rangle = v_0 t; \quad \langle p(t) \rangle = m v_0.$$

$$5.17. \Psi(x, t) \approx \sqrt{\frac{m}{i\hbar}} \Phi_0 \left( \frac{mx}{t} \right) e^{\frac{imx^2}{2\hbar t}}.$$

$$5.20. \hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{t}{m} \hat{p}; \quad \hat{p}(t) = \hat{p}.$$

$$5.21. \hat{x}(t) = \hat{x} + \frac{t}{m} \hat{p} + \frac{F_0 t^2}{2m}; \quad \hat{p}(t) = \hat{p} + \frac{F_0 t}{m}.$$

$$5.22. \hat{x}(t) = \hat{x} \cos \omega t + \frac{\hat{p}}{m\omega} \sin \omega t; \quad \hat{p}(t) = \hat{p} \cos \omega t - m\omega \hat{x} \sin \omega t.$$

5.23. ა) თავისუფალი ნაწილაკისათვის:

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{p_0 t}{m}; \quad \langle p(t) \rangle = p_0; \quad \langle [\Delta x(t)]^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4} \right); \quad \langle [\Delta p(t)]^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2}$$

ბ) ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის:

$$\langle x(t) \rangle = x_0 + \frac{p_0 t}{m} + \frac{F_0 t^2}{2m}; \quad \langle p(t) \rangle = p_0 + \frac{F_0 t}{m}; \quad \langle [\Delta x(t)]^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \left( 1 + \frac{\hbar^2 t^2}{m^2 a^4} \right);$$

$$\langle [\Delta p(t)]^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2};$$

გ) ოსცილატორისათვის:

$$\langle x(t) \rangle = x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t; \quad \langle p(t) \rangle = p_0 \cos \omega t - m\omega x_0 \sin \omega t;$$

$$\langle [\Delta x(t)]^2 \rangle = \frac{a^2}{2} \left( \cos^2 \omega t + \frac{\hbar^2 \sin^2 \omega t}{m^2 \omega^2 a^4} \right); \quad \langle [\Delta p(t)]^2 \rangle = \frac{\hbar^2}{2a^2} \left( \cos^2 \omega t + \frac{m^2 \omega^2 a^4 \sin^2 \omega t}{\hbar^2} \right);$$

5.25. ა) თავისუფალი ნაწილაკისათვის:

$$[\hat{p}(t), \hat{x}(t')] = -i\hbar$$

ბ) ერთგვაროვან ველში მოძრავი ნაწილაკისათვის:

$$[\hat{p}(t), \hat{x}(t')] = -i\hbar$$

გ) ოსცილატორისათვის:

$$[\hat{p}(t), \hat{x}(t')] = -i\hbar \cos \omega(t - t').$$

$$5.26. \quad \langle E(+\infty) \rangle - \langle E(-\infty) \rangle = \frac{1}{m} \langle \vec{p}(-\infty) | \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(t) dt + \frac{1}{2m} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \vec{F}(t) dt \right]^2.$$

5.27. უნიტარული ოპერატორია:

$$\hat{U} = \exp\{iS(x, t)\}, \quad (1)$$

სადაც

$$S(x, t) = -\frac{mVx}{\hbar} + \frac{mV^2t}{2\hbar}. \quad (2)$$

ტალღური ფუნქცია კოორდინატულ წარმოდგენაში შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\Psi'(x', t) = \exp\{iS(x, t)\} \Psi(x, t) \quad (3)$$

ტალღური ფუნქცია იმპულსურ წარმოდგენაში შემდეგნაირად გარდაიქმნება:

$$\Phi'(p', t) = \Phi(p = p' + mV, t) \exp\left(-\frac{imV^2t}{2\hbar} + \frac{ipVt}{\hbar}\right) \quad (4)$$

5.28. უნიტარული ოპერატორია:

$$\hat{U} = \exp\{iS(\vec{r}, t)\}, \quad (1)$$

სადაც

$$S(\vec{r}, t) = \frac{e}{\hbar c} f(\vec{r}, t) \quad (2)$$

და  $f(\vec{r}, t)$  ელექტრომაგნიტური ველების ყალიბრულ გარდაქმნაში მონაწილე ფუნქციაა, ანუ:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla f(\vec{r}, t); \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f(\vec{r}, t) \quad (3)$$

$$5.29. \hat{x}(t) = \hat{x} \cos \omega t + \frac{\hat{p}_x}{m\omega} \sin \omega t + \frac{\hat{p}_y}{m\omega} (1 - \cos \omega t)$$

$$\hat{p}_x(t) = \hat{p}_x \cos \omega t + \hat{p}_y \sin \omega t - m\omega \hat{x} \sin \omega t$$

$$\hat{y}(t) = \hat{y} - \hat{x} \sin \omega t + \frac{\hat{p}_x}{m\omega} (\cos \omega t - 1) + \frac{\hat{p}_y}{m\omega} \sin \omega t$$

$$\hat{p}_y(t) = \hat{p}_y; \hat{z}(t) = \hat{z} + \frac{i\hat{p}_z}{m}; \hat{p}_z(t) = \hat{p}_z,$$

სადაც

$$\omega = \frac{eH_0}{mc}$$

5.30. თუ აღნიშნული სისტემების ჰამილტონიანებში  $\hat{H}(t) = \hat{H}(\hat{p}(t), \hat{x}(t))$  ჩასვამთ  $\hat{p}(t)$  და  $\hat{x}(t)$  ოპერატორების ცხად სახეს, მიიღებთ, რომ  $\hat{H}(t) = \hat{H}(0)$ .

5.31. ა) ყველა სიდიდე ინახება დროში;

ბ) დროში ინახება  $E, p_x, p_y$  და  $L_z$ ;

გ) დროში ინახება  $E, L_x, L_y, L_z$  და  $L^2$ ;

დ) დროში ინახება  $p_x, p_y$  და  $L_z$ .

5.33. შეიცვლება მხოლოდ სრული ტალღური ფუნქციის დროითი მამრავლი და რადგანაც ფიზიკური აზრი აქვს ტალღური ფუნქციის მოდულის კვადრატს, ეს ცლილება არ აისახება ცდაზე დაკვირვებად სიდიდეებზე.

$$5.34. \Psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}; \omega = \frac{E}{\hbar}; k = \frac{p}{\hbar}.$$

$$5.35. c_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \Psi(x, 0) dx$$

$$5.36. \text{ ა) } A = \left(\frac{2am}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}; \text{ ბ) } V(x) = 2ma^2 x^2$$

$$5.37. \langle x \rangle = 0, \langle x^2 \rangle = \frac{\hbar}{4am}, \sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar}{4am}}, \langle p \rangle = 0, \langle p^2 \rangle = am\hbar.$$

$\sigma_p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{am\hbar}; \sigma_x \sigma_p = \frac{\hbar}{2}$ , ანუ კმაყოფილდება ჰეიზენბერგის თანაფარდობა.

5.39. ა)  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;

ბ)  $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \psi_1(x) e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}} + \psi_2(x) e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}} \right] = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\omega t} \left[ \sin \frac{\pi}{a} x + \sin \frac{2\pi}{a} x e^{-3i\omega t} \right],$

სადაც  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2ma^2}; n=1,2$  და  $\omega = \frac{\pi^2 \hbar}{2ma^2}$ ;

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{a} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) + \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right) + 2 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{a} x \cos 3\omega t \right].$$

გ)  $\langle x \rangle = \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{32}{9\pi^2} \cos 3\omega t \right]$ ; სიხშირე  $\gamma = \frac{3\omega}{2\pi} = \frac{3\pi\hbar}{4ma^2}$ ; ამპლიტუდა

$$C = \frac{32}{9\pi^2} \frac{a}{2} = 0,3603 \frac{a}{2};$$

დ)  $\langle p \rangle = m \frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{8\hbar}{3a} \sin 3\omega t$

ე)  $\langle H \rangle = \int \Psi^* \hat{H} \Psi dx = \frac{1}{2} \int (\Psi_1 + \Psi_2)^* \hat{H} (\Psi_1 + \Psi_2) dx = \frac{1}{2} (E_1 + E_2)$

ამ ფორმულაში უნდა შეიტანოთ 2.7 ამოცანის ენერჯის ფორმულა და მიიღებთ:

$$\langle H \rangle = \frac{1}{2} \frac{(1^2 + 2^2) \pi^2 \hbar^2}{2a^2 m} = \frac{5}{4} \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2 m}$$

5.40.  $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-i\omega t} \left[ \sin \frac{\pi}{a} x + \sin \frac{2\pi}{a} x e^{-3i\omega t} e^{i\phi} \right];$

$$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{a} \left[ \sin^2 \left( \frac{\pi}{a} x \right) + \sin^2 \left( \frac{2\pi}{a} x \right) + 2 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{2\pi}{a} x \cos(3\omega t - \phi) \right]$$

$\langle x \rangle = \frac{a}{2} \left[ 1 - \frac{32}{9\pi^2} \cos(3\omega t - \phi) \right]$ , რაც ნიშნავს, რომ დროის ათვლას ვინცებთ სხვა

მომენტებიდან. კერძოდ, როცა  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ,  $\langle x \rangle$  იწყება  $\frac{a}{2}$ -დან, ხოლო, როცა

$\phi = \pi$ ,  $\langle x \rangle$ , იწყება  $\frac{a}{2} \left[ 1 + \frac{32}{9\pi^2} \right]$ -დან.

5.41. ნორმირების მუდმივა  $A = \sqrt{\frac{30}{a^5}}$ ;

$c_n$  კოეფიციენტების საპოვნელად სარგებლობთ 5.35 ამოცანის შედეგით და დებულებით:

$$c_n = \frac{4\sqrt{15}}{[n\pi]^3} [\cos 0 - \cos[n\pi]] = \begin{cases} 0; & n = 1,3,5\dots \\ \frac{8\sqrt{15}}{[n\pi]^3}; & n = 0,2,4\dots \end{cases}$$

სოლო ტალღური ფუნქცია იქნება:

$$\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{30}{a}} \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,5\dots}^{\infty} \frac{e^{-\frac{i(n+1)^2 \pi^2 \hbar t}{2ma^2}}}{n^3} \sin \frac{n\pi}{a} x$$

5.42. ა)  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; ბ)  $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\alpha x/2} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{2}} (1 + \sqrt{2}\xi e^{-i\alpha})$ ;  $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ ;

$|\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\xi^2} (1 + 2\xi^2 + 2\sqrt{2}\xi \cos \alpha)$ ; გ)  $\langle x \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \cos \alpha$ ; ამპლი-

ტუდაა  $\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$  და სიხშირეა  $\omega$ . დ)  $\langle p \rangle = -\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \sin \alpha$ . ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

5.43. ბ)  $\langle H \rangle = E + \frac{1}{2} m v^2$ .

5.44. ბ)  $|\psi(x,t)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}} e^{-\frac{m\omega}{\hbar}(x-a \cos \alpha)^2}$  გ)  $\langle x \rangle = a \cos \alpha$ ;

$\langle p \rangle = -m a \omega \sin \alpha$ . ერენფესტის თეორემა ამ მდგომარეობისათვის სრულდება.

## თავი 6. კვანტურ-მექანიკური ამოცანების ამოხსნის მთავარი მეთოდები

### 6.1 შეშვოტების სტაციონარული თეორია

6.1. ა)  $E_n^{(1)} = V_{nn} = V_0 \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1 + (-1)^n}{\pi^2 (n+1)^2} \right\}$ ;  $n = 0,1,2,\dots$

ბ)  $E_n^{(1)} = V_{nn} = \frac{V_0}{a} \left\{ a - 2b + \frac{a}{\pi(n+1)} \sin \frac{2\pi(n+1)b}{a} \right\}$ .

შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობაა:

$$|V_0| \ll \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2} (n+1)$$

6.2. პირდაპირი დათვლით ადვილად აჩვენებთ, რომ დიდი  $n$ -სთვის

$$E^{(1)} \approx \frac{2}{a} \int_0^a V(x) dx$$

არ არის დამოკიდებული  $n$ -ზე.

6.3. სტანდარტული შეშფოთების თეორიით მიიღებთ:

$$E_n^{(1)} = 0; \quad E_n^{(2)} = -\frac{e^2 a^2 \mathcal{E}^2}{2\hbar\omega}$$

ამრიგად, მეორე რიგში მიღებული შედეგი ემთხვევა ზუსტ შედეგს, რის გამოც შეშფოთების უფრო მაღალი რიგების განხილვას აზრი არ აქვს.

6.4.  $E_n^{(1)} = -\frac{e\mathcal{E}a}{2}$ ;  $E_n^{(2)} = -\frac{\beta_0 \mathcal{E}^2}{2}$ , სადაც  $\beta_0$  არის ძირითადი მდგომარეობის

პოლარიზება:

$$\beta_0 = \frac{1024}{\pi^6} \frac{ma^4 e^2}{\hbar^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{(2k+1)^5 (2k+3)^5}$$

6.5.  $E_n \approx E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + \dots = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \left( 1 + \frac{\alpha}{2k} - \frac{\alpha^2}{8k^2} \right) + \dots$

მწკრივის კრებადობის პირობაა  $|\alpha/k| \leq 1$ .

6.6.  $E_0^{(1)} = \frac{V_0}{4}$ ;  $E_n^{(1)} = \frac{V_0}{2}$ ;  $n = 1, 2, \dots$

$$E_n^{(2)} = \frac{ma^2 V_0^2}{96\pi^2 \hbar^2} \begin{cases} -\frac{3}{2}, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ \frac{6}{n(n+2)}, & n \geq 2 \end{cases}$$

შეშფოთების თეორიის გამოყენების პირობაა

$$|V_0| \ll \frac{\hbar^2 \pi^2}{ma^2} (n+1)$$

$$6.7. E_0^{(3)} = \frac{m^2 a^4 V_0^3}{1024 \pi^4 \hbar^4}.$$

$$6.8. E_n^{(1)} = E_n^{(2)} = 0, \text{ თუ } n \text{ კენტია;}$$

$$E_n^{(1)} = \frac{2a}{\alpha}, \text{ თუ } n \text{ ლუწია.}$$

$$E_n^{(2)} = -\frac{2m\alpha^2}{\pi^2 \hbar^2 (n+1)^2}, \text{ თუ } n \text{ ლუწია.}$$

შეშვოთების თეორიის გამოყენების პირობაა:

$$\left| \frac{\alpha}{a} \right| \ll \frac{\hbar^2}{m a^2 \pi^2} (n+1)$$

6.9. შენარჩუნდება.

6.10. პოლარიზება ტოლია:

$$\alpha_0 = \frac{2Id^2}{\hbar^2}$$

6.11. პოლარიზება ტოლია:

$$\alpha_0 = \frac{2Id^2}{3\hbar^2}$$

6.12. დონე ორჯერადადა გადაგვარებული, ხოლო პირველი ადგზნებული დონის გახლეჩა იქნება  $\mp \frac{\alpha a^2}{2}$ . დონეების გადაგვარება იხსნება.

6.13. დონე სამჯერადადა გადაგვარებული, ხოლო მეორე ადგზნებული დონის გახლეჩა იქნება  $E_{2,1}^{(1)} = -\alpha a^2; E_{2,2}^{(1)} = 0; E_{2,3}^{(1)} = \alpha a^2$ . დონეების გადაგვარება იხსნება.

$$6.14. E_0^{(2)} = -\frac{1}{2} \beta_0 \varepsilon^2; \text{ სადაც } \beta_0 = \frac{5me^2}{4\hbar^2 \eta^4} \text{ პოლარიზებაა და } \eta = \frac{m\alpha}{\hbar^2};$$

$$6.15. E_n^{(0)} = -d\varepsilon + \hbar \sqrt{\frac{d\varepsilon}{I}} \left( n + \frac{1}{2} \right), n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_n^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2^n \varphi_0 n! \sqrt{\pi}}} \exp \left\{ -\frac{\varphi^2}{2\varphi_0^2} \right\} H_n \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right); \varphi_0 = \left( \frac{\hbar^2}{Id\varepsilon} \right)^{\frac{1}{4}}, \text{ სადაც } H_n(\varphi)$$

ერმიტის პოლინომებია.

$$6.16. E_N^{(0)} = -d\varepsilon + \hbar\omega(N+1), \quad \omega = \left(\frac{d\varepsilon}{I}\right)^{1/2}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Psi_{n_1 n_2}^{(0)} = C_{n_1} C_{n_2} \exp\left\{-\frac{\theta^2}{2\theta_0^2}\right\} H_{n_1}\left(\frac{x}{\theta_0}\right) H_{n_2}\left(\frac{y}{\theta_0}\right); \quad n_1 + n_2 = N; \quad \theta_0 = \left(\frac{\hbar^2}{I d\varepsilon}\right)^{1/4},$$

სადაც  $H_n(\theta)$  ერმიტის პოლინომებია.

$$6.17. E_0^{(1)} = \frac{\hbar^2 \pi^2 \varepsilon}{3ma^2}.$$

$$6.18. E_{n_r, l}^{(1)} = U_0 \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{24\xi} [3n^2 - l(l+1)] \right\}, \quad n = n_r + l + 1; \quad \xi = \frac{ma^2 U_0}{\hbar^2}.$$

$$6.19. E_{n_r, l}^{(1)} = \frac{\alpha}{a} \left\{ 1 - \frac{1}{4\xi} [3n_r^2 + 6n_r(l+1) + (l+1)(2l+3)] \right\}, \quad n = n_r + l + 1.$$

$$6.20. R_{n_r, l}^{(0)}(r) = \frac{1}{\sqrt{2^{n_r} a n_r! \sqrt{\pi}}} \exp\left\{-\frac{(r-r_0)^2}{2a^2}\right\} H_{n_r}\left(\frac{r-r_0}{a}\right);$$

$$E_{n_r, l}^{(0)} = -\frac{\alpha(2-p)}{2} r_0^{-p} + \hbar \sqrt{\frac{\alpha(2p-p^2)}{m}} r_0^{-p-2} \left(n_r + \frac{1}{2}\right); \quad a = \left(\frac{\hbar^2 r_0^{p+2}}{m\alpha(2p-p^2)}\right)^{1/4}.$$

6.21. მოცემული ამოცანის ამონახსნი მიიღება, თუ წინა, 6.20 ამოცანაში გააკეთებთ შეცვლებს:  $\alpha \rightarrow -\alpha; \nu \rightarrow -\nu$ .

$$6.22. \psi_n^{(2)} = \sum_m \sum_k \frac{V_{mk} V_{kn}}{\hbar^2 \omega_{nk} \omega_{nm}} \psi_m^{(0)} - \sum_m \frac{V_{nn} V_{mn}}{\hbar^2 \omega_{mn}^2} \psi_m^{(0)} - \frac{\psi_n^{(0)}}{2} \sum_m \frac{|V_{mn}|^2}{\hbar^2 \omega_{nm}^2};$$

$$\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar} (E_n^{(0)} - E_m^{(0)}).$$

$$6.23. E_n^{(3)} = \sum_k \sum_m \frac{V_{nm} V_{mk} V_{kn}}{\hbar^2 \omega_{mn} \omega_{kn}} - V_{nn} \sum_m \frac{|V_{nm}|^2}{\hbar^2 \omega_{mn}^2}; \quad \omega_{nm} = \frac{1}{\hbar} (E_n^{(0)} - E_m^{(0)})$$

$$6.24. E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) - \frac{15}{4} \frac{\alpha^2}{\hbar\omega} \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^3 \left(n^2 + n + \frac{11}{30}\right) + \frac{3}{2} \beta \left(\frac{\hbar}{m\omega}\right)^2 \left(n^2 + n + \frac{1}{2}\right).$$

$$6.25. E^{(1)} = \frac{1}{2} [V_{11} + V_{22} \pm \hbar\omega^{(1)}], \quad \text{სადაც } \hbar\omega^{(1)} = \sqrt{(V_{11} - V_{22})^2 + 4|V_{12}|^2}$$

$$\psi^{(0)} = c_1^{(0)} \psi_1^{(0)} + c_2^{(0)} \psi_2^{(0)}, \quad \text{სადაც}$$



$$c_1^{(0)} = \left\{ \frac{V_{12}}{2|V_{12}|} \left[ 1 \pm \frac{V_{11} - V_{22}}{\hbar\omega^{(1)}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}; \quad c_2^{(0)} = \pm \left\{ \frac{V_{21}}{2|V_{12}|} \left[ 1 \mp \frac{V_{11} - V_{22}}{\hbar\omega^{(1)}} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

$$6.26. \quad E_n^{(2)} = \sum_m \frac{V_{nm}V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}.$$

$$6.27. \quad E_{nl}^{(1)} = -\frac{eB}{2\mu} \hbar m, \text{ სადაც } m \text{ მაგნიტური კვანტური რიცხვია.}$$

6.29. ყველა ენერჯიის დონე წაინაცვლებს  $V_0/2$  სიდიდით, ხოლო ტალღური ფუნქციები არ შეიცვლება.

$$6.30. \quad E^{(1)} = 0$$

$$6.31. \quad E_n^{(1)} = 0; \quad E_n^{(2)} = \frac{ma^2\lambda^2}{\hbar^2} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

$$6.32. \quad E_n^{(1)} = -\frac{qa}{2}; \quad \psi_m^{(1)} = \frac{-4qma^3}{\pi^4\hbar^2} \psi_m^{(0)} \sum_{m \neq n} \frac{mn(\cos \pi m \cos \pi n - 1)}{(m^2 - n^2)^2} \psi_m^{(0)}.$$

$$6.34. \quad E_n^{(1)} = -\frac{mZe^4}{\hbar^2 n^2}.$$

$$6.35. \quad E_2^{(0)} = -\frac{e^2}{8a} \text{ დონე იხლიჩება გადაუგვარებელ } E_{2,l=0} \approx E_2^{(0)} \left( 1 - \frac{1}{140} \left( \frac{b}{a} \right)^4 \right)$$

და სამჯერადად გადაგვარებულ  $E_{2,l=1} \approx E_2^{(0)} \left( 1 - \frac{1}{140} \left( \frac{b}{a} \right)^4 \right)$  დონედ.

$$6.36. \quad \Delta E_{n_1, n_2}^{(1)} = \frac{L^2 C}{4}, \text{ სადაც } L \text{ ორმოს სიგანეა.}$$

$$6.37. \quad E_0^{(1)} = -\frac{\hbar\omega}{2} \left( 1 + \frac{m\alpha a^2}{\hbar} \right) \exp\left( -\frac{m\alpha a^2}{\hbar} \right)$$

$$E_0^{(2)} = -\frac{\hbar\omega}{8} \left( 1 + \frac{m\alpha a^2}{\hbar} + \frac{m^2 \omega^2 a^4}{\hbar^2} \right) \exp\left( -\frac{2m\alpha a^2}{\hbar} \right).$$

$$6.38. \quad E_n^{(1)} = \frac{e\epsilon a}{2}.$$

## 6.2. ვარიაციული მეთოდი

$$6.39. \text{ ა) } E_0 = \left(\frac{243}{32}\right)^{1/3} \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3} \approx 1,966 \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3};$$

$$\text{ბ) } E_0 = \left(\frac{81}{4\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3} \approx 1,861 \left(\frac{\hbar^2 F_0^2}{m}\right)^{1/3}.$$

$$6.40. \text{ ა) } E = -\frac{4m\alpha^2}{\pi^2\hbar^2} \approx 0,81E_0.$$

$$\text{ბ) } E = -\frac{256m\alpha^2}{70\pi^2\hbar^2} \approx 0,74E_0.$$

$$6.41. E = \sqrt{3}\hbar\omega \approx 1,73\hbar\omega, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad \text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$$

$$6.42. \text{ ა) } E = \frac{5\hbar^2}{ma^2} \approx 1,013E_0; \quad \text{ბ) } E = \frac{2\hbar^2\pi^2}{3ma^2} \approx 1,333E_0; \quad \text{გ) } E = \frac{6\hbar^2}{ma^2} \approx 1,21E_0.$$

$$6.43. E = \frac{21\hbar^2}{ma^2} \approx 1,064E_1.$$

$$6.44. E = \frac{28\hbar^2}{ma^2} \approx 1,064E_1; \quad \text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = \frac{5\pi^2\hbar^2}{2ma^2}.$$

6.45. ბმული დონის არსებობის საკმარისი პირობაა:

$$\max \left\{ \beta \int_0^\infty |U(r)| r^2 e^{-2\beta r} dr \right\} \geq \frac{\hbar^2}{8m}.$$

ამ ფორმულაში მინიმალური მნიშვნელობა შეესაბამება პარამეტრის ოპტიმალურ მნიშვნელობას.

$$6.46. \text{ ა) } E = \frac{\hbar\omega}{\sqrt{2}} \approx 0,71\hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{ბ) } E = \frac{\sqrt{7}\hbar\omega}{5} \approx 0,53\hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_1 = \frac{1}{2}\hbar\omega.$$

$$6.47. \text{ ა) } E = \left(\frac{243}{16}\right)^{1/3} \left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \approx 2,48 \left(\frac{k^2\hbar^2}{2m}\right)^{1/3};$$

$$\delta) E = \left(\frac{81}{2\pi}\right)^{1/3} \left(\frac{k^2 \hbar^2}{2m}\right)^{1/3} \approx 2,345 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{2m}\right)^{1/3};$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = 2,338 \left(\frac{k^2 \hbar^2}{2m}\right)^{1/3}.$$

$$6.48. \text{ ა) } \xi = \frac{m\alpha a}{\hbar^2} \geq \exp \frac{y}{4y} \geq e/4 \approx 0,68; \quad y = 2\eta a$$

$$\xi \geq \frac{3\sqrt{\pi}}{16y} e^{y^2} \geq \frac{3\sqrt{2\pi e}}{16} \approx 0,77; \quad y^2 = \eta a^2$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } \xi_0 = 0,5.$$

$$6.49. \text{ ა) } E = \frac{3\hbar^2}{\mu a^2};$$

$$\delta) E = 2,92 \frac{\hbar^2}{\mu a^2};$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = 2,88 \frac{\hbar^2}{\mu a^2}$$

$$6.50. E_{01} = 7,5 \frac{\hbar^2}{\mu a^2};$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = 7,33 \frac{\hbar^2}{\mu a^2}$$

$$6.51. E_0 = \sqrt{\frac{3}{2}} \hbar \omega \approx 1,22 \hbar \omega$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = \hbar \omega$$

$$6.52. \text{ ა) } E = -\frac{4}{3\pi} \frac{m\alpha^2}{\hbar^2} \approx -0,42 \frac{m\alpha^2}{\hbar^2};$$

$$\delta) E = -\frac{5}{16} \frac{m\alpha^2}{\hbar^2} \approx -0,31 \frac{m\alpha^2}{\hbar^2};$$

$$\text{ზუსტი მნიშვნელობა: } E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}.$$

$$6.53. E_{2s} = -\frac{e^2}{8a}; \quad \psi_{2s} = (8\pi a^3)^{-1/2} \left(1 - \frac{r}{2a}\right) e^{-\frac{r}{2a}}.$$

6.54. ა)  $E = \sqrt{3}\hbar\omega \approx 1,73\hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}};$

ბ)  $E = 2\sqrt{\frac{5}{7}}\hbar\omega \approx 1,69\hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$

ზუსტი მნიშვნელობა:  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega.$

6.55.  $E = \frac{9}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}\hbar\omega \approx 1,575\hbar\omega; \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$

ზუსტი მნიშვნელობა:  $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega.$

6.57.  $E = \frac{3}{4}3^{1/3} \frac{\hbar^2}{2m} k^{1/3} = 1,082 \frac{\hbar^2}{2m} k^{1/3}$

6.61.  $E = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left\{ 1 - 2(ma) + \frac{3}{2}(ma)^2 \right\}$

### 6.3. შეშფოთების არასტაციონარული თეორია

6.62. ნანილაკის აღზნებულ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობები უსასრულო მომავალში ( $t \rightarrow -\infty$ ) ტოლია:

ა)  $W^{(1)}(0 \rightarrow n) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \quad k = 1, 2, \dots \\ \frac{64a^2 F_0^2 (n+1)^2}{\pi^4 n^4 (n+2)^4 \hbar^2} I; & n = 2k+1 \end{cases}$

სადაც

$$I = \sqrt{\pi\tau} \exp\left(-\frac{\omega_{n0}^2 \tau^2}{4}\right); \quad \omega_{n0} = \hbar\pi^2 n(n+2)/2ma^2$$

ბ)  $W^{(1)}(0 \rightarrow n) = \begin{cases} 0, & n = 2k; \quad k = 1, 2, \dots \\ \frac{64a^2 F_0^2 (n+1)^2}{\pi^4 n^4 (n+2)^4 \hbar^2} I; & n = 2k+1 \end{cases}$

სადაც

$$I = 2\tau(1 + \omega_{n0}^2 \tau^2)^{-1}; \quad \omega_{n0} = \hbar\pi^2 n(n+2)/2ma^2$$

მიღებული შედეგები სამართლიანია, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$ma^3 F_0 \ll \hbar^2 \pi^2$$

$$6.63. W^{(1)}(n \rightarrow k) = \frac{e^2 a^2 |I|^2}{2\hbar^2} \begin{cases} n+1; & k = n+1; \\ n; & k = n-1 \end{cases} \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

სადაც  $I$  ა) და ბ) შემთხვევებში ტოლია:

$$ა) I = \sqrt{\pi\tau\epsilon_0} \exp\left(-\frac{\omega^2\tau^2}{4}\right); \quad ბ) I = \frac{2\tau\epsilon_0}{1 + \omega^2\tau^2}$$

მიღებული შედეგები სამართლიანია, როცა სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$ea\epsilon_0\sqrt{n+1} \ll \hbar\omega$$

$$6.64. W^{(1)}(n \rightarrow k) = \frac{e^2 a^2 |I|^2}{2\hbar^2} \begin{cases} n+1; & k = n+1; \\ n; & k = n-1 \end{cases} \quad a = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}},$$

სადაც  $I$  ა) და ბ) შემთხვევებში ტოლია:

$$ა) I = \pi\tau\epsilon_0 \exp(-|\omega\tau|);$$

$$ბ) I = \frac{1}{2} \sqrt{\pi\tau\epsilon_0} \left\{ \exp\left[-\frac{1}{4}(\omega - \omega_0)^2 \tau^2\right] + \exp\left[-\frac{1}{4}(\omega + \omega_0)^2 \tau^2\right] \right\}$$

$$ea\epsilon_0\sqrt{n+1} \ll \hbar\omega$$

6.65. ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ  $n$  მდგომარეობიდან  $n+1$  და  $n-1$  მდგომარეობებში გადასვლის ალბათობები:

$$W^{(1)}(n \rightarrow n+1) = \frac{q^2 \epsilon_0^2}{2m\hbar\omega^3} (n+1) e^{-2\omega\tau}; \quad W^{(1)}(n \rightarrow n-1) = \frac{q^2 \epsilon_0^2}{2m\hbar\omega^3} n e^{-2\omega\tau}$$

მიღებული შედეგები სამართლიანია, როცა სრულდება შემდეგი პირობა:

$$W^{(1)}(n \rightarrow n+1) + W^{(1)}(n \rightarrow n-1) \ll 1.$$

6.66. ნულისაგან განსხვავებულია მხოლოდ  $m$  მდგომარეობიდან  $m+1$  და  $m-1$  მდგომარეობებში გადასვლის ალბათობები:

$$W^{(1)}(m \rightarrow m') = \frac{d^2}{4\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(t) \exp(i\omega_{m'm}t) dt \right|^2 \quad (1)$$

(1) ფორმულაში  $\omega_{m'm} = \frac{(2m+1)\hbar}{2I}$ , როცა  $m' = m+1$  და  $\omega_{m'm} = \frac{(2m-1)\hbar}{2I}$ ,

როცა  $m' = m-1$ .

$$6.67. a_{kn}^{(2)} = -\frac{1}{\hbar^2} \sum_m \int_{-\infty}^t V_{km}(t') \exp(i\omega_{km}^{(0)} t') \int_{-\infty}^{t'} V_{mn}(t'') \exp(i\omega_{mn}^{(0)} t'') dt'' dt'. \quad (1)$$

სისტემის ნებისმიერი  $n$  საწყისი მდგომარეობიდან საბოლოო  $k$ -ურ მდგომარეობაში გადასვლის ალბათობა (შეშფოთების გამორთვის შემდეგ) ტოლია ( $k \neq n$ )

$$W(n \rightarrow k) = |a_{kn}(t = +\infty)|^2 = |a_{kn}^{(1)}(t = \infty) + a_{kn}^{(2)}(t = \infty) + \dots|^2 \quad (2)$$

და თუ  $a_{kn}^{(1)}(t = +\infty) = 0$ , მაშინ:

$$W^{(2)}(n \rightarrow k) = |a_{kn}^{(2)}(t = +\infty)|^2 \quad (3)$$

სიდიდე წარმოადგენს შესაბამის მდგომარეობაში სისტემის გადასვლის ალბათობას შეშფოთების თეორიის მეორე რიგში.

6.69. შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში შესაძლოა როტატორის გადასვლა იმ მდგომარეობებში, რომელთათვისაც  $m = \pm 1$ , ანუ  $E_1 = \frac{\hbar^2}{2I}$  მდგომარეობაში.

$t \rightarrow \infty$ -ში იმის ალბათობა, რომ როტატორს  $E_1$  ენერგია ექნება, შემდეგი თაზაფარდობით მოიცემა:

$$W(E_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{qQa}{\hbar b v} \right)^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \frac{i\hbar b \tau}{2I v}}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau \right|^2 \quad (1)$$

(1) გამოსახულებაში შემავალი ინტეგრალი კი ტოლია დამატებაში განმარტებული (C.3.19) მაკდონალდის ფუნქციის:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp \frac{i\hbar b \tau}{2I v}}{(1 + \tau^2)^{3/2}} d\tau = 2\beta K_1(\beta); \quad \beta = \frac{\hbar b}{2I v}. \quad (2)$$

$$6.70. W(E_1) = \frac{2(qQ)^2}{b^2 \hbar \omega m v^2} \left[ \frac{\omega b}{v} K_1 \left( \frac{\omega b}{v} \right) \right]^2.$$

$$6.71. W_{01}^{(1)} = \frac{(q\varepsilon)^2}{2m\hbar\omega_0} \left[ \frac{\sin \frac{\omega_0 \tau}{2}}{\frac{\omega_0}{2}} \right]^2.$$

$$6.72. W_{0k} = \frac{1}{\hbar^2} e^{-\frac{(E_0 - E_k)^2 \tau^2}{2\hbar^2}}$$

$$6.73. W = \frac{m^2 a^4 V_0^2}{4\pi^6 \hbar^4} \sin^2 \frac{2\pi^2 \hbar^2}{ma^2} t$$

## თავი 7. კვანძობის კლასიკური მიხედვით

### 7.1. ენერგეტიკული სპექტრის დაკვანტვა

$$7.1. E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \text{ შედეგი ემთხვევა ზუსტ შედეგს.}$$

$$7.2. E_n = -\frac{\hbar^2}{2ma^2} \left[ \sqrt{\frac{2ma^2 U_0}{\hbar^2}} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \right]^2$$

$$7.3. E_n = \left( \frac{\pi \hbar (n + 1/2)}{2\sqrt{2mC_\nu a}} \right)^{\frac{2\nu}{\nu+2}} U_0^{\frac{2}{\nu+2}}, \quad (1)$$

სადაც

$$C_\nu = \int_0^1 \sqrt{1-t^\nu} dt. \quad (2)$$

(1)-დან მიიღებთ იმის გათვალისწინებით, რომ  $n \gg 1$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n \approx \frac{\partial E_n}{\partial n} \approx \frac{E_n 2\nu}{n(\nu+2)}. \quad (3)$$

დისკრეტული სპექტრის სიმკვრივეა:

$$g(E) = \frac{1}{\Delta E_n} = \frac{n(\nu+2)}{2\nu E_n} \propto E^{\frac{2-\nu}{2\nu}}. \quad (4)$$

7.4. კვანძობის კლასიკურის გამოყენების პირობა ამ ამოცანაში ასე გამოიყურება:

$$\frac{\hbar \nu}{2\sqrt{2m\alpha}} |x - x_0|^{\frac{\nu-2}{2}} \ll 1$$

$\nu = 2$ -თვის კვანძობის კლასიკურის გამოყენების პირობაა:  $\sqrt{m\alpha} \gg \hbar$

7.5. კვანძობის კლასიკურის გამოყენების პირობაა:

$$\frac{\hbar \nu}{2\sqrt{2m\alpha}} r^{\frac{\nu-2}{2}} \ll 1$$

$$7.6. E_n \approx -\frac{4\alpha}{a^2} \exp \left\{ -\frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m\alpha}} \left( n + 3/4 \right) - 2 \right\}.$$

7.7. კვაზიკლასიკურის გამოყენების პირობაა:

$$\frac{\hbar}{\sqrt{mU_0a^2}}|y|^{-\frac{3}{2}}\left(\frac{x_0}{a}\right)^{-1-\nu/2} \ll 1 \quad (1)$$

სადაც

$$y = \frac{x - x_0}{x_0} \quad (2)$$

რადგანაც მაღალი დონეებისათვის  $E_n \rightarrow \infty$ , შესაბამისად  $x_0 \rightarrow \infty$ , (1) გამოსახულებიდან გვექნება, რომ  $\nu > 0$ -თვის შეიძლება გამოიყენოთ კვაზიკლასიკური მიდგომის სტანდარტული ფორმულები.

$$7.8. \quad \delta E_n \approx \frac{1}{\tau} \int_a^b \frac{\delta U(x)}{v(x)} dx,$$

სადაც  $v(x) = \sqrt{\frac{2}{m}[E_n^{(0)} - U_0(x)]}$  და  $\tau = \int_a^b \frac{dx}{v(x)}$ , ხოლო  $E_n^{(0)}$  საწყისი ენერგიაა.

7.9.  $N = \frac{\sqrt{2}}{3\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \int (-U)^{3/2} dV$ . ამ ფორმულაში ინტეგრება ხდება სივრცის იმ ნაწილში, სადაც  $U < 0$ .

$$7.10. \quad N = \frac{m}{4\hbar^2} \int (-U) r dr.$$

$$7.11. \quad E_{n+1} - E_n = V_0 \ln \frac{n+3/4}{n-1/4}.$$

**7.2. კვაზიკლასიკური ტალღური ფუნქციები, ალბათობები და საშუალოები. პოტენციურ ბარიერებში გასვლა**

$$7.12. \quad \langle F(x) \rangle = \frac{\sqrt{2m}}{T(E_n)} \int_a^b \frac{F(x) dx}{\sqrt{E_n - U(x)}};$$

$$\langle x^2 \rangle = \alpha^2 \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad \langle x^4 \rangle = \frac{3}{2} \alpha^4 \left( n^2 + n + \frac{1}{4} \right); \quad \alpha^2 = \frac{\hbar}{m\omega}.$$

$$7.13. \quad \langle F(p) \rangle = \frac{1}{T(E_n)} \oint \frac{F(p(x)) dx}{v(x)};$$

$$\langle p^2 \rangle = m\hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right); \quad \langle p^4 \rangle = \frac{3}{2} (m\hbar\omega)^2 \left( n^2 + n + \frac{1}{4} \right);$$



7.14. მიზიდვისათვის  $\psi \approx r^{\frac{s}{4}-1}$ , ხოლო განზიდვისათვის

$$\psi \approx \exp\left(-\frac{1}{\hbar} \int_{r_0}^r p dr\right) = \exp\left[-\frac{2\sqrt{2m\alpha}}{(s-2)\hbar} r^{-\left(\frac{s}{2}-1\right)}\right].$$

7.15.  $\int_a^b p(x) dx = \pi\hbar(n + 3/4); \quad n = 0, 1, 2, \dots$

7.16.  $D \approx \exp\left[-\frac{\pi a}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{U_0}}(U_0 - E)\right]; \quad x_0 = a\sqrt{1 - \frac{E}{U_0}}.$

7.17.  $D \approx \exp\left[-\frac{4a\sqrt{2m}}{3U_0\hbar}(U_0 - E)^{3/2}\right].$

7.18.  $D \approx \exp\left\{-\frac{4a}{\hbar} \sqrt{2mE} \left[\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{U_0}{E}-1}\right]\right\}.$

7.19.  $D \approx \exp\left\{-\frac{2\pi a}{\hbar} \sqrt{2m} [\sqrt{U_0} - \sqrt{E}]\right\}.$

7.20.  $D = 4 \frac{\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0} \exp\left(-\frac{2}{P} \int_a^b |p| dx\right); \quad U_0 = \tilde{U}(0).$

7.21.  $D = 4 \frac{\sqrt{E(U_0 - E)}}{U_0} \exp\left[-\frac{4a\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{3/2}\right];$  კვაზიკლასიკურობის გა-

მოყენების პირობაა  $\frac{4a\sqrt{2m}}{3\hbar U_0}(U_0 - E)^{3/2} \gg 1.$

7.22.  $W \approx \exp\left\{-\frac{2\alpha}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} \left[\arccos \sqrt{\frac{Er_0}{\alpha}} - \sqrt{\frac{Er_0}{\alpha} \left(1 - \frac{Er_0}{\alpha}\right)}\right]\right\}.$

7.23.  $D = D_0 \exp\left\{-\frac{8x_0\sqrt{2mE}}{\hbar} \left(\sqrt{\frac{U_0}{E}-1} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{U_0}{E}-1}\right)\right\}.$

### თავი 8. სპინი

8.1.  $s_x = \pm \frac{1}{2}$ ; ამ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ფუნქციებია:

$$\Psi_{s_x=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \Psi_{s_x=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_{s_y=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \Psi_{s_y=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

$s_z = \pm \frac{1}{2}$ ; ამ მნიშვნელობების შესაბამისი საკუთარი ფუნქციებია:

$$\Psi_{s_z=+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Psi_{s_z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

8.5.  $\hat{s}_n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$ , სადაც  $\theta$  და  $\varphi$  პოლარული და აზიმუტალური კუთხეებია, რომლებიც განსაზღვრავენ  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორის მიმართულებას.

8.6.  $f = a + \vec{b} \hat{\sigma}$  ოპერატორს გააჩნია ორი საკუთარი მნიშვნელობა  $f_1 = a + b$  და  $f_2 = a - b$ .

8.7. რადგანაც სპინის პროექცია ნებისმიერ ღერძზე მხოლოდ ორ  $\pm 1/2$  მნიშვნელობას ღებულობს, სპინის პროექციის კვადრატს (ნებისმიერ ღერძზე) ნებისმიერ მდგომარეობაში ყოველთვის აქვს  $1/4$  მნიშვნელობა.

8.8.  $\hat{L}$  ოპერატორის ერმიტულობა მის მატრიცულ სახეს შემდეგ შეზღუდვას ადებს:

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ b^* & c \end{pmatrix}, \quad (1)$$

სადაც  $a$  და  $c$  ნამდვილი რიცხვებია. უნიტარული გარდაქმნებით (1) მატრიცა დიაგონალურ სახეზე შეიძლება იქნეს მიყვანილი:

$$\hat{L}' = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ 0 & l_2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

სადაც  $l_1$  და  $l_2$   $\hat{L}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობებია. (1) მატრიცის შპურის და დეტერმინანტის ინვარიანტობიდან კი უნიტარული გარდაქმნების მიმართ, მიიღებთ:

$$l_{1,2} = \frac{a+c}{2} \pm \sqrt{\frac{(a-c)^2}{4} + |b|^2} \quad (3)$$

8.10.  $|\hat{\sigma}_z| = \sqrt{\hat{\sigma}_z^2} = 1, \quad |\hat{\sigma}| = \sqrt{\hat{\sigma}^2} = \sqrt{3}\hat{1}.$

8.11.  $\hat{\sigma}[\hat{\sigma}\hat{\sigma}] = 6i\hat{1}.$

$$8.12. (\hat{a}\hat{\sigma})^n = \begin{cases} a^n, & n = 2k; \quad k = 0,1,2 \\ a^{n-1}(\hat{\sigma}\hat{a}), & n = 2k+1 \end{cases}$$

$$8.13. \hat{s}_+ = \hat{s}_x + i\hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_- = \hat{s}_x - i\hat{s}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \hat{s}_+^2 = \hat{s}_-^2 = 0.$$

$$8.14. \hat{P}_{s_z = \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}_z).$$

$$8.15. \hat{P}_{s_n = \pm \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1 \pm \hat{\sigma}_n).$$

$$8.16. \Psi' = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \exp\left(i\varphi_0 \frac{\hat{\sigma}}{2}\right) \Psi = \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} + i \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{\hat{\sigma}}{2} \right) \Psi \quad (1)$$

(1)-დან მიიღება  $\Phi^\bullet = |\varphi_1^\bullet, \varphi_2^\bullet\rangle$  სპინორული ფუნქციის გარდაქმნის კანონი:

$$\Phi^{\bullet\prime} = \Phi^\bullet \left( \cos \frac{\varphi_0}{2} - i \sin \frac{\varphi_0}{2} \frac{\hat{\sigma}}{2} \right) \quad (2)$$

$$8.19. (\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2)^2 = 3 - 2\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2.$$

$$8.20. W_+ = \cos^2 \frac{\theta}{2}; \quad W_- = \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

$$8.21. \vec{A} = \frac{1}{2}[F(a+b) + F(a-b)]; \quad \vec{B} = \frac{\vec{b}}{2b}[F(a+b) - F(a-b)].$$

$$8.22. \exp(i\vec{a}\vec{\sigma}) = \cos a + i \sin a \left( \hat{\sigma} \frac{\vec{a}}{a} \right).$$

$$8.23. \text{ა) } A = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}; \quad \text{ბ) } A = \frac{1}{5}.$$

$$8.24. (S_1 S_2) = \frac{\hbar^2}{4} \text{ ტრიბლეტურ მდგომარეობებში.}$$

$$(S_1 S_2) = -\frac{3}{4} \hbar^2 \text{ სინგლეტურ მდგომარეობებში.}$$

$$8.25. \langle \hat{A} \rangle = 0.$$

## თავი 9. იგივეური ნაწილაკები

### 9.1. ტალღური ფუნქციების სიმეტრია

9.1.  $\chi_{s_z}$  წარმოადგენს ცალკეული ნაწილაკების ნორმირებულ სპინურ ფუნქციებს, რომელთაც  $s_z$ -ის გარკვეული მნიშვნელობა გააჩნიათ  $s_z = -s, -s+1, \dots, s$ . სისტემის სპინური (არასიმეტრიზებული სპინების მიხედვით) ფუნქციებია  $X = \chi_{s_z}^{(1)} \chi_{s_z}^{(2)}$ . ამ ფუნქციების შემდეგი კომბინაციები:

$$ა) X_{s_z s_z}^{(+)} = \chi_{s_z}^{(1)} \chi_{s_z}^{(2)};$$

$$ბ) X_{s_z s_z'}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \chi_{s_z}^{(1)} \chi_{s_z'}^{(2)} + \chi_{s_z}^{(2)} \chi_{s_z'}^{(1)} \}; \quad s_z \neq s_z';$$

$$გ) X_{s_z s_z'}^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \chi_{s_z}^{(1)} \chi_{s_z'}^{(2)} - \chi_{s_z}^{(2)} \chi_{s_z'}^{(1)} \}; \quad s_z \neq s_z'.$$

ერთიანზეა ნორმირებული და გააჩნიათ გარკვეული სიმეტრია სპინური ცვლადების გადასმის მიმართ ( $X_{s_z s_z}^{(+)}$  სიმეტრიული, ხოლო  $X_{s_z s_z'}^{(-)}$  ანტისიმეტრიული ფუნქციაა): ა) შემთხვევაში  $2s+1$  განსხვავებული სპინური მდგომარეობა იქნება, ხოლო ბ) და გ) მდგომარეობებში  $C_{2s+1}^2 = (2s+1)2s/2! = s(2s+1)$ . შესაბამისად, სიმეტრიული მდგომარეობების საერთო რიცხვი იქნება  $(s+1)(2s+1)$ , ანტისიმეტრიულის  $-s(2s+1)$ , ხოლო მდგომარეობების საერთო რიცხვი, როგორც უნდა ყოფილიყო, იქნება  $(2s+1)^2$ .

9.2. წინა, 9.1 ამოცანის შედეგების გათვალისწინებით, ბოზონებისათვის მიიღებთ:

$$\Psi = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) X_{s_z s_z'}^{(+)},$$

ხოლო ფერმიონებისათვის:

$$\Psi = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) X_{s_z s_z'}^{(-)}$$

და საერთო რიცხვი ბოზონებისათვის არის  $(s+1)(2s+1)$ , სადაც  $s$  მთელი რიცხვია, ფერმიონებისათვის კი  $-s(2s+1)$ , სადაც  $s$  ნახევარმთელი რიცხვია.

9.3. ბოზონებისა და ფერმიონებისათვის ეს რიცხვია  $(2s+1)^2$ .

9.5. ა) თუ  $f_1 = f_2 = f_3 = f$ , მაშინ:  $\Psi = \psi_f(\xi_1) \psi_f(\xi_2) \psi_f(\xi_3)$ ;

ბ) თუ  $f_1 \neq f_2 = f_3$ , მაშინ:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \psi_{f_2}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_1}(\xi_2) \psi_{f_3}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \psi_{f_1}(\xi_3) \};$$

გ)  $f_1 \neq f_2 \neq f_3 \neq f_1$ , მაშინ:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \left\{ \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \psi_{f_3}(\xi_3) + \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_3}(\xi_2) \psi_{f_2}(\xi_3) + \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_1}(\xi_2) \psi_{f_3}(\xi_3) + \right. \\ \left. + \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_3}(\xi_2) \psi_{f_1}(\xi_3) + \psi_{f_3}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \psi_{f_1}(\xi_3) + \psi_{f_3}(\xi_1) \psi_{f_1}(\xi_2) \psi_{f_2}(\xi_3) \right\}.$$

9.6.  $s_{z,1} = s_{z,2} = s_{z,3} = 1$ -თვის გვექნება:

$$\Psi_{1,1,1} = \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3) \chi_1^{(1)} \chi_1^{(2)} \chi_1^{(3)} = \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_3$$

$s_{z,1} = s_{z,2} = 1$ ;  $s_{z,3} = 0$ -თვის გვექნება:

$$\Psi_{1,1,0} = \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3) \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \chi_1^{(1)} \chi_1^{(2)} \chi_0^{(3)} + \chi_1^{(1)} \chi_0^{(2)} \chi_1^{(3)} + \chi_0^{(1)} \chi_1^{(2)} \chi_1^{(3)} \} = \phi(\vec{r}_1) \phi(\vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3) \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_3 \right\}$$

ამონერეთ ( $s_{z,1}; s_{z,2}; s_{z,3}$ ) სიდიდეების ყველა სხვა მნიშვნელობები, რომლებსაც მიყავხართ სისტემის დამოუკიდებელ მდგომარეობებამდე: (1,1,-1), (1,0,0), (1,0,-1), (1,-1,-1), (0,0,0), (0,0,-1), (0,-1,-1), (-1,-1,-1). სულ გაქვთ სისტემის 10 დამოუკიდებელი მდგომარეობა, რომელთაგან 7 შეესაბამება  $S = 3$  სისტემის სრულ სპინს, ხოლო 3 -  $S = 1$  სრულ სპინს.

9.7. ამოცანა წინა 9.6 ამოცანის ანალოგიურია. სულ გაქვთ სისტემის 10 დამოუკიდებელი მდგომარეობა.

$$9.9. dW = 2 |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 dV_1 dV_2.$$

$$9.10. ა) W = \iint |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 dV_1 dV_2$$

$$ბ) W = 2 \iint |\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 dV_1 dV_2.$$

$$9.11. dW = \frac{1}{2} \{ |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 \} dV$$

$$ა) W = 1/2;$$

$$ბ) W = \frac{1}{4} \{ 1 + 4|S|^2 \}, \text{ სადაც } S = \int_{z \geq 0} \psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) dV.$$

$$9.12. dW = \frac{1}{2} \{ |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 \} dV$$

$$ა) W = 1/2$$

$$ბ) W = \frac{1}{4} \{ 1 - 4|S|^2 \}, \text{ სადაც } S = \int_{z \geq 0} \psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r}) dV.$$

9.13.  $dW = \left| \Psi \left( \bar{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \bar{R} - \frac{\vec{r}}{2} \right) \right|^2 d^3 R d^3 r$ . ნაწილაკებს შორის მანძილის მიხედვით განაწილების ფუნქცია იქნება:

$$dW = f(\vec{r}) d^3 r; f(\vec{r}) = \int \left| \Psi \left( \bar{R} + \frac{\vec{r}}{2}, \bar{R} - \frac{\vec{r}}{2} \right) \right|^2 d^3 R. \quad (1)$$

(1)-ის გათვალისწინებით  $\int |\Psi(\vec{r}, \vec{r})| d\vec{r}$  არის ნაწილაკების ერთ წერტილში მოხვედრის ალბათობა.

9.15.  $L = 0, 2, 4, \dots$ -თვის  $S$ -მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს:  $2s, 2s - 2, \dots, 0$ , ხოლო  $L = 1, 3, 5, \dots$ -თვის  $S$ -მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს:  $2s - 1, 2s - 3, \dots, 1$ .

9.16.  $L = 0, 2, 4, \dots$ -თვის  $S$ -მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს:  $2s - 1, 2s - 3, \dots, 0$ , ხოლო  $L = 1, 3, 5, \dots$ -თვის  $S$ -მა შეიძლება შემდეგი მნიშვნელობები მიიღოს:  $2s, 2s - 2, \dots, 1$ .

9.17. ნაწილაკების იგივეურობის გათვალისწინებით მიიღებთ:

$$E_N = \hbar \omega (N + 3/2); N = n_1 + n_2 + n_3; N = 0, 2, 4, \dots$$

$$9.18. -\frac{1}{3} (\vec{r}_1^2 + \vec{r}_2^2 + \vec{r}_1 \vec{r}_2).$$

$$9.20. dW = |\psi_1(\vec{r})|^2 dV |\psi_2(\vec{r})|^2 dV + |\psi_1^*(\vec{r}) \psi_2(\vec{r})|^2 (dV)^2.$$

განსხვავებული ნაწილაკების შემთხვევაში:

$$dW = |\psi_1(\vec{r})|^2 dV |\psi_2(\vec{r})|^2 dV$$

ანუ არ გვაქვს ინტერფერენციული წევრი.

9.21. ნაწილაკების საშუალო სიმკვრივე შესაბამისი ოპერატორის

$$\hat{n}(\vec{r}) = \sum_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$$

გასაშუალოებით მიიღება, სადაც აჯამვა ყველა ნაწილაკით ხდება.

$$\bar{n}(\vec{r}) = 2C^2 \{ |\psi_1(\vec{r})|^2 + |\psi_2(\vec{r})|^2 + \Delta(\vec{r}) \},$$

$$\text{სადაც } \Delta(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) \psi_2^*(\vec{r}) \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle + \psi_2(\vec{r}) \psi_1^*(\vec{r}) \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle.$$

განსხვავებული ნანილაკების შემთხვევაში:

$$\bar{n}(\vec{r}) = 2C^2 \left\{ \psi_1(\vec{r})^2 + \psi_2(\vec{r})^2 \right\}.$$

9.22. ა)  $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; ბ)  $A = \frac{1}{2}$ .

9.23. ა)  $\psi_{11} = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{a}$ ;  $E_{11} = 2K$ ;  $K = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ ;

ბ)  $\psi_{11} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{2\pi x_2}{a} + \sin \frac{\pi x_2}{a} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right]$ ;  $E_{11} = 5K$ ;

გ)  $\psi_{11} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{2\pi x_2}{a} - \sin \frac{\pi x_2}{a} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right]$ ;  $E_{11} = 5K$ .

9.24.  $H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{d^2}{dx_1^2} + \frac{d^2}{dx_2^2} \right)$ ;

9.25. ა)  $\psi_{22} = \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \sin \frac{2\pi x_2}{a}$ ;  $E_{22} = 8K$ ;  $K = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$ . გადაუგვარებელია.

$\psi_{13} = \frac{2}{a} \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{3\pi x_2}{a}$ ;  $E_{13} = 10K$ ; ორჯერადად გადაგვარებულია.

$\psi_{31} = \frac{2}{a} \sin \frac{3\pi x_1}{a} \sin \frac{\pi x_2}{a}$ ;  $E_{31} = 10K$ ;

ბ)  $\psi_{22} = \frac{2}{a} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \sin \frac{2\pi x_2}{a}$ ;  $E_{22} = 8K$ ; გადაუგვარებელია.

$\psi_{13} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{3\pi x_2}{a} + \sin \frac{\pi x_2}{a} \sin \frac{3\pi x_1}{a} \right]$ ;  $E_{13} = 10K$

გადაუგვარებელია.

გ)  $\psi_{13} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin \frac{\pi x_1}{a} \sin \frac{3\pi x_2}{a} - \sin \frac{\pi x_2}{a} \sin \frac{3\pi x_1}{a} \right]$ ;  $E_{13} = 10K$

გადაუგვარებელია.

$\psi_{23} = \frac{\sqrt{2}}{a} \left[ \sin \frac{2\pi x_1}{a} \sin \frac{3\pi x_2}{a} - \sin \frac{2\pi x_2}{a} \sin \frac{3\pi x_1}{a} \right]$ ;  $E_{23} = 13K$

გადაუგვარებელია.

9.26. ა)  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) \right\}$ ;

ბ)  $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) - \frac{128a^2 m^2 n^2}{\pi^4 (m^2 - n^2)^4} \right\}$ ;

$$b) \langle (x_1 - x_2)^2 \rangle = a^2 \left\{ \frac{1}{6} - \frac{1}{2\pi^2} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \right) + \frac{128a^2 m^2 n^2}{\pi^4 (m^2 - n^2)^4} \right\}.$$

## 9.2. მეორადი დაკვანტვის ფორმალიზმის ელემენტები

$$9.27. [\hat{A}, \hat{B}] = i/2, \text{ სადაც } \hat{A} = \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^+); \hat{B} = \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^+);$$

9.28.  $a = \alpha \hat{x} + \beta \hat{p}$ ;  $\hat{a} = \alpha^* \hat{x} + \beta^* \hat{p}$ .  $\alpha$ -სა და  $\beta$ -ს არჩევა არ არის ცალსახა. შეიძლება ავიღოთ, მაგალითად:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} L ; \quad \beta = \frac{iL}{\sqrt{2}} \hbar$$

$$\Psi_0(x) = (\pi L^2)^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2L^2}}$$

9.29. ფერმიონებისათვის  $\hat{a}$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა  $|0\rangle$  და საკუთარი მნიშვნელობაა 0, ხოლო  $\hat{a}^+$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციაა  $|1\rangle$  და საკუთარი მნიშვნელობაა 0.

ბოზონებისათვის  $\hat{a}^+$  ოპერატორის საკუთარი ფუნქციებისა და საკუთარი მნიშვნელობების განტოლებას არ აქვს ამონახსნი.

ბოზონებისათვის  $\hat{a}$  ოპერატორის საკუთარი მნიშვნელობაა ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი.

9.31. ფერმიონებისათვის  $\hat{a}^2 = 0$ , მაგრამ  $\hat{a}'^2 = 2\alpha\hat{a} + \alpha^2 \neq 0$  და ამიტომ მითითებული გარდაქმნა არ არის უნიტარული. ბოზონებისათვის გარდაქმნა უნიტარულია და უნიტარულ ოპერატორს შემდეგი სახე აქვს:

$$\hat{U} = e^{\alpha^* \hat{a} - \alpha \hat{a}^+}$$

9.32. ფერმიონებისათვის  $\alpha = \pm 1, \beta = 0$  და  $\alpha = 0, \beta = \pm 1$

ბოზონებისათვის უნდა სრულდებოდეს პირობა:  $\alpha^2 - \beta^2 = 1$ . ამასთან,  $\beta^2 / \alpha^2 < 1$  და  $\alpha^2 \geq 1$

9.33. ფერმიონებისათვის შეიძლება, ბოზონებისათვის - არა.

9.34.  $C_f$  წარმოადგენს განსახილველი მდგომარეობის ტალღურ ფუნქციას  $f$  წარმოდგენაში.

$$9.35. \bar{F} = \int \varphi^*(\vec{r}) f \varphi(\vec{r}) dV.$$

$$9.36. \hat{a}_{f_i}^+ = \sum_k C(f_i, g_k) \hat{a}_{g_k}^+; \quad \hat{a}_{f_i} = \sum_k C^*(f_i, g_k) \hat{a}_{g_k}$$

$$\text{სადაც } C(f_i, g_k) = \int \Psi_{g_k}^* \Psi_{f_i} d\tau.$$



9.37. თუ  $f_1 \neq f_2$ , მაშინ  $|2\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ |0\rangle$  ნორმირებულია ერთზე როგორც ბოზონებისათვის, ასევე ფერმიონებისათვის.

კოორდინატულ წარმოდგენაში ნორმირებული ტალღური ფუნქციებია:

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2) \pm \psi_{f_2}(\xi_1) \psi_{f_1}(\xi_2) \},$$

სადაც  $+$  და  $-$ , შესაბამისად, შეესაბამება ბოზონებს და ფერმიონებს, ხოლო  $\xi = \vec{r}, \alpha$ ;  $\alpha$  სპინური ცვლადია.

თუ  $f_1 = f_2$ , მაშინ ნორმირებულ ორნაწილაკოვან ბოზონურ მდგომარეობას შემდეგი სახე აქვს:  $|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_f^+)^2 |0\rangle$ , ხოლო ფერმიონული მდგომარეობა არ არსებობს.

კოორდინატულ წარმოდგენაში ბოზონებისათვის ნორმირებული ტალღური ფუნქციებია:

$$\Psi(\xi_1, \xi_2) = \psi_{f_1}(\xi_1) \psi_{f_2}(\xi_2)$$

9.38. თუ  $f_1 \neq f_2 \neq f_3$ , მაშინ  $|3\rangle = \hat{a}_{f_1}^+ \hat{a}_{f_2}^+ \hat{a}_{f_3}^+ |0\rangle$  ნორმირებულია ერთზე როგორც ბოზონებისათვის, ასევე ფერმიონებისათვის. ბოზონებისათვის ტალღური ფუნქცია ნაპოვნი 9.5 ამოცანაში, ხოლო ფერმიონებისათვის გვექნება:

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} \psi_{f_1}(\xi_1) & \psi_{f_1}(\xi_2) & \psi_{f_1}(\xi_3) \\ \psi_{f_2}(\xi_1) & \psi_{f_2}(\xi_2) & \psi_{f_2}(\xi_3) \\ \psi_{f_3}(\xi_1) & \psi_{f_3}(\xi_2) & \psi_{f_3}(\xi_3) \end{vmatrix}$$

## თავი 10. ატომები და მოლეკულები

### 10.1. ერთ- და ორელექტრონიანი ატომების სტაციონარული მდგომარეობები

10.1. შეშფოთების ოპერატორია:

$$V(r) = \begin{cases} 0, & r > R \\ \frac{Ze^2}{r} - \frac{Ze^2}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & r < R \end{cases} \quad (1)$$

ხოლო ძირითადი მდგომარეობის შეუშფოთებელი ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi_0 = \left( \frac{Z^3}{\pi a_0^3} \right)^{1/2} e^{-Zr/a_0}; \quad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} \approx 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ სმ.} \quad (2)$$

ენერგია კი არის:

$$E_0^{(0)} = -\frac{m_e (Ze^2)^2}{2\hbar^2} \quad (3)$$

$$\Delta E_0 = E_0^{(1)} = \int V(r) |\Psi_0(r)|^2 dV = \frac{2\pi}{5} Z e^2 R^2 |\Psi_0(0)|^2 = \frac{2}{5} Z^4 \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 \frac{e^2}{a_0} \quad (4)$$

$$\left| \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(0)}} \right| = \frac{4}{5} Z^2 \left( \frac{R}{a_0} \right)^2 \approx 8 \cdot 10^{-10} Z^{8/3} \quad (5)$$

( $R \approx 1,5Z^{1/3} \cdot 10^{-13}$  სმ).  $Z = 1$ -თვის (5)-დან ლებულობთ:  $\left| \frac{E_0^{(1)}}{E_0^{(0)}} \right| \approx 10^{-4}$ .

10.2.  $E_{nj}^{(1)} = \langle H' \rangle = \frac{me^4}{\hbar^2} \left( \frac{e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{1}{2n^3} \left( \frac{1}{l+1/2} - \frac{1}{j+1/2} \right)$

10.3.  $\Delta E_{HFS} = E_{HFS}(J = I + 1/2) - E_{HFS}(J = I - 1/2) = \frac{4\pi e \hbar \mu_0 (2I + 1) |\Psi_0(0)|^2}{3mcI}$ .

10.4. ელექტრონებს შორის ურთიერთქმედების უგულვებლყოფისას ატომურ ერთეულებში ჰელიუმისმაგვარი იონის ძირითადი მდგომარეობის ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi = \Psi_0(r_1) \Psi_0(r_2) = \frac{Z^3}{\pi} e^{-Z(r_1+r_2)}, \quad (1)$$

რომლის შესაბამისი დონეა:

$$E_0^{(0)} = -Z^2. \quad (2)$$

ენერჯის შესწორება შეშფოთების თეორიის პირველ რიგში იქნება

$$E_0^{(1)} = \int \frac{|\Psi|^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_1 dV_2, \quad (3)$$

და (1) - (3)-დან მიიღებთ:

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = -Z^2 + 5Z/8. \quad (4)$$

10.5. შეშფოთება იქნება:

$$\hat{V} = \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} - (Z - Z_{eff}) \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (1)$$

და წინა (10.4) ამოცანის ანალოგიურად მიიღებთ:

$$E_0^{(1)} = Z_{eff} (2Z_{eff} - 2Z + 5/8), \quad (2)$$

ხოლო  $E_0^{(1)} = 0$ -დან მიიღებთ:

$$Z_{eff} = Z - 5/16 \quad (3)$$

და საბოლოოდ

$$E_0 \approx E_0^{(0)} + E_0^{(1)} = -(Z - 5/16)^2. \quad (4)$$

10.6.  $\bar{E}(Z_{eff}) = Z_{eff}(Z_{eff} - 2Z + 5/8),$

ამ გამოსახულების  $Z_{eff}$  მინიმიზაციით ძირითადი დონის ენერგია იქნება:

$$E_0 \approx \min \bar{E}(Z_{eff}) = -(Z - 5/16)^2$$

იონიზაციის პოტენციალი ტოლია:  $I = -Z^2/2 - E_0 = Z^2/2 - 5Z/8 + 25/256.$

10.7.

$$\bar{E}(\alpha, \beta) = 2C^2 \left( -Z(\alpha + \beta) + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} + \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta} + \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{20\alpha^3\beta^3}{(\alpha + \beta)^3} + \frac{64\alpha^3\beta^3}{(\alpha + \beta)^6} \frac{\alpha\beta - Z(\alpha + \beta)}{(\alpha + \beta)^6} \right),$$

სადაც ნორმირების მუდმივა ტოლია:

$$C^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{64\alpha^3\beta^3}{(\alpha + \beta)^6} \right]^{-1}.$$

10.8. ორთო მდგომარეობებში ელექტრონების ფარდობითი მოძრაობის მომენტი ლებულობს კენტი მნიშვნელობებს, ხოლო პარა მდგომარეობებში ლუნ მნიშვნელობებს.

10.9.  $\bar{E} = \frac{5}{8}Z_{eff}^2 - \frac{5}{4}ZZ_{eff} + \frac{137}{729}Z_{eff}.$

ამ გამოსახულების  $Z_{eff}$  მინიმიზაციით  $2^3S$  დონის ენერგია იქნება:

$$E(2^3S) = \min \bar{E} = -\frac{5}{8} \left( Z - \frac{1096}{7290} \right)^2 \approx -\frac{5}{8} (Z - 0,150)^2$$

ანუ  $Z_{eff} \approx Z - 0,150$  და იონიზაციის პოტენციალი ტოლია

$$I = \frac{5}{8} (Z - 0,150)^2 - \frac{Z^2}{2}.$$

## 10.2. მრავალელექტრონიანი ატომები

10.10. ა)  $^1P_1; ^1P_{0,1,2}$ ; ბ)  $^1S_0; ^1P_1; ^1D_2; ^3S_1; ^3P_{0,1,2}; ^3D_{1,2,3}$ ;

გ)  $^1P_1; ^1D_2; ^1F_3; ^3P_{0,1,2}; ^3D_{1,2,3}; ^3F_{2,3,4}$ .

10.11. ა)  $^1S_0; ^1D_2; ^3P_{0,1,2}; ^3S_1$ ; ბ)  $^2P_{1/2,3/2}; ^2D_{3/2,5/2}; ^4S_{3/2}$ ;

გ)  $^1S_0; ^1D_2; ^3P_{0,1,2}$ .

ა), ბ) და გ) შემთხვევებში ნორმალური თერმებია  $^3P_0$ ;  $^4S_{3/2}$  და  $^3P_2$ .

10.12. აზოტის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ელექტრონული კონფიგურაციაა  $(1s)^2(2s)^2(2p)^3$  და ნორმალური თერმია  $^4S_{3/2}$ .

ქლორის ატომის ძირითადი მდგომარეობის ელექტრონული კონფიგურაციაა  $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^5$  და ნორმალური თერმია  $^2P_{3/2}$ .

10.13 ა)  $I = +1$ ; ბ)  $I = (-1)^k$ ; გ)  $I = +1$ .

10.14.  $N = 4C_{2l+1}^3 = \frac{4(2l+1)!}{3(2l-2)!}$

10.16.  $\bar{r} = C_n Z^{-n/3}$ , სადაც

$$C_n = b^n \int_0^\infty x^{n+2} \left[ \frac{\chi(x)}{x} \right]^2 dx$$

და  $\chi(x)$  ტომას-ფერმის მოდელის უნივერსალური ფუნქციაა.

10.17.  $dn(p) = \frac{3}{128Z} \left\{ g \left[ \left( \frac{3\pi p^3}{32Z^2} \right)^{2/3} \right] \right\}^3 d^3 p$ , სადაც  $g(x) = \frac{x}{\chi(x)}$ .

10.18.  $n = \frac{2}{\pi} \sqrt{2b} Z^{1/3} \int_0^\infty \sqrt{\frac{\chi(x)}{x}} dx \propto Z^{1/3}$

10.19. კინეტიკური ენერგია არის:

$$T = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \int n^{5/3}(r) dV.$$

ელექტრონების ერთმანეთთან ურთიერთქმედების ენერგიაა:

$$U U_1 = \frac{Z}{2} \int \frac{n(r)}{r} dV - \frac{(3\pi^2)^{2/3}}{4} \int n^{5/3}(r) dV$$

ელექტრონების ბირთვთან ურთიერთქმედების ენერჯია:

$$U_2 = -Z \int \frac{n(r)}{r} dV \quad 3.$$

$$10.20. \quad E[n(r)] = \frac{3(3\pi^2)^{2/3}}{10} \int n^{5/3} dV - Z \int \frac{n}{r} dV + \frac{1}{2} \iint \frac{n(r)n(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV dV'$$

### 10.3. ორატომიანი მოლეკულა

10.22. ა)  $\Sigma_g^+$ ; ბ)  $\Sigma_u^+$ ; გ)  $\Sigma_g^-$ ; დ)  $\Sigma_u^-$ .

10.23. შესაძლო თერმები:  $2^2\Sigma_g^+$ ,  $2^2\Sigma_u^+$ ,  $2^2\Pi_g$ ,  $2^2\Pi_u$ . ციფრი 2 სიმბოლო  $\Sigma$ -ის ნინ ნიშნავს, რომ არსებობს ორი სხვადასხვა თერმი შესაბამისი კვანტური რიცხვებით.

10.24. შესაძლო თერმები:

1)  $N_2$  -ის  $1,5\Sigma_g^+$ ,  $3,7\Sigma_u^+$ ;

2)  $LiH$  -ის  $1,3\Sigma^+$ ;

3)  $HCl$  -ის  $1,3\Sigma^+$ ,  $1,3\Pi$ ;

4)  $NO$  -ის  $2,4,6\Sigma^+$ ,  $2,4,6\Pi$ .

10.25. არ არის შესაძლებელი.

10.26. არ არის შესაძლებელი.

10.27. ა)  $(I_0)_{HD} \approx 4,5$  ევ. ბ)  $(I_0)_{D_2} \approx 4,54$  ევ.

$$\text{ბ) } (\hbar\omega_e)_{HD} \approx \frac{\sqrt{3}}{2} (\hbar\omega_e)_{H_2} = 0,46 \text{ ევ. } (\hbar\omega_e)_{D_2} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (\hbar\omega_e)_{H_2} = 0,38 \text{ ევ.}$$

$$\text{გ) } (B_e)_{HD} = \frac{3}{4} (B_e)_{H_2}; \quad (B_e)_{D_2} = \frac{1}{4} (B_e)_{H_2}.$$

$$10.28. \quad E_0(R, \alpha) = \frac{\alpha^2}{2R^2} - \frac{1}{R} [3 - 2(2 + \alpha)e^{-\alpha}].$$

10.29.  $R_0 = 1,97$  ატომ. ერთ,  $E_0 \approx -0,47$  ატომ. ერთ,  $W_0 \approx 0,008$  ატომ. ერთ.

არ შეიძლება დავასკვნათ, რომ არსებობს  $H_2^+$  სტაბილური იონი.

$$10.30. \quad E_2 = \frac{\Delta E_1 \Delta E_2}{2(\Delta E_2 - \Delta E_1)} = 0,3 \text{ მევ.}$$

10.31.  $\Delta E = \hbar\omega(1 - 2x) = 0,514$  ევ.; 33,7-ჯერ მეტია.

10.32. 13 დონე.

10.33. გვექნება ორი  $\sigma$  ელექტრონი და ოთხ-ოთხი  $\pi$  და  $\delta$  ელექტრონები.

10.34. ა)  $^1\Sigma$ ; ბ)  $^1\Sigma$  და  $^3\Sigma$ ; გ)  $^1\Pi$  და  $^3\Pi$ ; დ)  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$  და  $^1\Delta$ ;

ე)  $^1\Sigma$ ,  $^3\Sigma$ ,  $^1\Delta$  და  $^3\Delta$ .

10.35.  $M_z = \Omega\hbar$ , სადაც  $\Omega$  ტოლია: 0  $^1\Sigma$ -თვის, 1  $^3\Sigma$ -თვის, 1/2 და 3/2  $^2\Pi$ -თვის.

10.36.  $\Lambda = 0,1$ ;  $S = 1/2, 3/2$ . გვექნება შემდეგი თერმები:  $^2\Sigma$ ,  $^4\Sigma$ ,  $^2\Pi_{3/2,1,2}$  და  $^4\Pi_{5/2,3,2,1/2,-1/2}$ .

### თავი 11. მოძრაობა მაგნიტურ ველში

11.1. ვექტორულ პოტენციალს ეძება ე.წ. კულონის ყალიბრება

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0.$$

$$11.2. [\hat{v}_i, \hat{v}_k] = \frac{ie\hbar}{\mu^2 c} \epsilon_{ikl} H_l; [\hat{v}_i, \hat{x}_k] = -\frac{i\hbar}{\mu} \delta_{ik}.$$

$$11.3. \hat{x}_0 = \hat{x} - \frac{1}{\omega} \hat{v}_y, \text{ სადაც } \omega = \frac{-eH}{\mu c} \text{ და } \hat{v}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{e}{c} A_y$$

$$\hat{y}_0 = \hat{y} + \frac{1}{\omega} \hat{v}_x \text{ და } \hat{v}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \frac{e}{c} A_x$$

$$\hat{\rho}_0^2 = \hat{x}_0^2 + \hat{y}_0^2 \quad \hat{\rho}^2 = \frac{1}{\omega^2} (\hat{v}_x^2 + \hat{v}_y^2).$$

$$11.4. [\hat{H}, \hat{x}_0] = [\hat{H}, \hat{y}_0] = [\hat{H}, \hat{\rho}_0^2] = [\hat{H}, \hat{\rho}^2] = 0$$

$$[\hat{x}_0, \hat{y}_0] = -\frac{i\hbar c}{eH}; [\hat{\rho}_0^2, \rho^2] = 0$$

$$11.5. \text{ ა) } \Psi_{n p_y p_z}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right] \Psi_n^{osc}\left(x - \frac{c p_y}{e H_0}\right) \quad (1)$$

$$E_{n p_z} = \frac{|e|\hbar H_0}{\mu c} \left(n + \frac{1}{2}\right) + \frac{p_z^2}{2\mu}; \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2)$$

სადაც  $\Psi_n^{osc}$  ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა.

$$\delta) \Psi_{np_x p_z}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)\right] \Psi_n^{osc}\left(y + \frac{cp_x}{eH_0}\right) \quad (3)$$

ენერგია, ცხადია, არ იქნება დამოკიდებული ვექტორული პოტენციალის ყალიბრებაზე და ამიტომ ისევ (2) ფორმულით მოიცემა.

$$11.6. \Psi_{np_x p_z}(x, y, z) = \exp\left(-\frac{ieH}{\hbar c}xy\right) \int C_{p_x}^{p_y}(n) \Psi_{np_y p_z} dp_y,$$

სადაც  $C_{p_x}^{p_y}$  მითითებაში აღნიშნული გაშლის კოეფიციენტებია.

$$11.7. \Psi_{nmp_z}(\rho, \varphi, z) = C\left(\frac{\rho}{a}\right)^{|m|} \exp\left[im\varphi + \frac{i}{\hbar}p_z z - \frac{\rho^2}{4a^2}\right] F\left(-r, |m|+1, \frac{\rho^2}{2a^2}\right) \quad (1)$$

სადაც  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  მაგნიტური კვანტური რიცხვია,  $a = \sqrt{\frac{\hbar c}{|e|H_0}} > 0$ , ხოლო  $r$  განისაზღვრება ტოლობიდან:

$$2r + 1 + |m| - \frac{e}{|e|}m = 2n + 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$E = \hbar\omega_0(n + 1/2) + \frac{p_z^2}{2\mu}; \quad \omega_0 = \frac{|e|H_0}{\mu c}. \quad (3)$$

(1) ტალღური ფუნქცია აღწერს ნაწილაკის სტაციონარულ მდგომარეობას ერთგვაროვან მაგნიტურ ველში, რომელიც ლოკალიზებულია განივი მიმართულებით და ამიტომ შესაძლოა მისი ნორმირება  $x, y$  სიბრტყეში.

11.8.  $\hat{\rho}_0^2$ -ის საკუთარი მნიშვნელობებია:

$$(\rho_0^2)_k = a^2(2k + 1); \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad a^2 = \frac{\hbar c}{|e|H_0}.$$

$\hat{\rho}^2$ -ის საკუთარი მნიშვნელობებია:

$$(\rho^2)_n = a^2(2n + 1); \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad a^2 = \frac{\hbar c}{|e|H_0}$$

11.9. 11.7 ამოცანაში მიღებული (1) ტალღური ფუნქციიდან მიიღება

$m = -\frac{e}{|e|}n$ -თვის:

$$|\Psi_n|^2 = C^2 \left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n} e^{-\frac{\rho^2}{2a^2}}, \quad (1)$$

საიდანაც (1)-ის ერთზე ნორმირების პირობიდან მიიღება:

$$C^2 = \frac{1}{\pi a^2 2^{n+1} \Gamma(n+1)}, \quad (2)$$

ხოლო  $\langle \rho \rangle$  და  $\langle \rho^2 \rangle$  საშუალოებისათვის გვექნება:

$$\langle \rho \rangle = 2\pi \int_0^\infty \rho |\Psi_n|^2 \rho d\rho = a\sqrt{2} \frac{\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)} \quad (3)$$

$$\langle \rho^2 \rangle = 2\pi \int_0^\infty \rho^3 |\Psi_n|^2 d\rho = 2a^2(n+1) \quad (4)$$

$\rho$  სიდიდის მიხედვით  $W = 2\pi\rho |\Psi_n|^2$  ალბათობის სიმკვრივეს მაქსიმუმი აქვს წერტილში:

$$\rho_{\max} = a\sqrt{2n+1} \quad (5)$$

$$11.10. \quad \Psi_{np_y p_z}(x, y, z) = \frac{1}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(p_y y + p_z z)\right] \Psi_n^{osc}\left(x - \frac{cp_y}{eH_0} - \frac{\mu c^2 \varepsilon}{eH^2}\right)$$

$$E = \hbar\omega_0(n+1/2) + \frac{p_z^2}{2\mu} - \frac{cp_y}{H} - \frac{\mu c^2 \varepsilon^2}{2H^2}; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\omega_0 = \frac{|e|H}{\mu c},$$

სადაც  $\Psi_n^{osc}$  ერთგანზომილებიანი ოსცილატორის ტალღური ფუნქციაა.

11.11. თუ  $z$  ღერძს მივმართავთ პარალელური ელექტრული და მაგნიტური ველების გასწვრივ, მაშინ ნაწილაკის ჰამილტონიანი მხოლოდ  $-e\mathcal{E}z$  დამატებითი წევრით განსხვავდება 11.7 ამოცანის ჰამილტონიანისაგან. ამავე დროს ნარჩუნდება „განივი“ და „გასწვრივი“ მოძრაობები ნაწილაკისა, ოღონდ ახლა გასწვრივი მოძრაობა შეესაბამება ნაწილაკის ერთგვაროვან ველში მოძრაობას, განსხვავებით თავისუფალი მოძრაობისა 11.7 ამოცანაში. ამიტომ, 11.7 ამოცა-

ნის ენერჯის (3) ფორმულაში  $\frac{p_z^2}{2\mu}$  წევრი უნდა შევცვალოთ  $E_l$  გასწვრივი

მოძრაობის ენერჯით ერთგვაროვან ველში, ხოლო 11.7 ამოცანის (1) ფორმულის

გამოსახულებაში – ბრტყელი ტალღა  $\exp\left[\frac{i}{\hbar} p_z z\right]$ ,  $\Psi_{E_l}(z)$  ეირის ფუნქციით (იხ. ამოცანა 2.74).



11.12. ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi_{Emn_2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \Psi_{n_2}^{osc}(z) f_{n_1m}(\rho); \quad n_2 = 0, 1, \dots \quad (1)$$

სადაც

$$f_{n_1m}(\rho) = C \left( \frac{\rho}{a} \right)^{|m|} e^{-\frac{\rho^2}{4a^2}} F \left( -n_1, |m| + 1, \frac{\rho^2}{2a^2} \right); \quad n_1 = 0, 1, \dots \quad (2)$$

ენერგია კი იქნება:

$$E_{n_1mn_2} = -\frac{e\hbar H m}{2\mu c} + \hbar \sqrt{\omega^2 + \frac{e^2 H^2}{4\mu^2 c^2} (2n_1 + |m| + 1)} + \hbar \omega \left( n_2 + \frac{1}{2} \right); \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (3)$$

სუსტი ველების შემთხვევაში, როცა  $\frac{|e|H}{\mu c} \ll \omega$ , (3)-დან მიიღება

$$E_{n_1mn_2} \approx E_N^{(0)} - \frac{e\hbar m}{2\mu c} H + \frac{e^2 \hbar (2n_1 + |m| + 1)}{8\mu^2 c^2 \omega} H^2. \quad (4)$$

(4) გამოსახულებაში  $E_N^{(0)} = \hbar \omega (N + 3/2)$  აღწერს შეუშფოთებელ ოსცილატორს, ამასთან,  $N = 2n_1 + |m| + n_2$ .  $H$ -ის მიხედვით ნრფივი წევრი შეესაბამება ოსცილატორის მაგნიტური მომენტის ურთიერთქმედებას მაგნიტურ ველთან, ხოლო  $H^2$  კვადრატული წევრი განსაზღვრავს ენერგიის წანაცვლების დიამაგნიტურ ნაწილს.

სუსტი ველების შემთხვევაში, როცა  $\frac{|e|H}{\mu c} \gg \omega$ , (3)-დან მიიღება

$$E_{n_1mn_2} \approx E_{l,n} + \frac{\hbar \omega^2}{\omega_H} (2n_1 + |m| + 1) + E_{l,n_2}, \quad (5)$$

ამ შემთხვევაში სპექტრის „განივი“ ნაწილი ძირითადად განისაზღვრება მაგნიტური ველის მოქმედებით და  $E_{l,n} = \hbar \omega (n + 1/2)$  ლანდაუს დონეებია, სადაც

$n = n_1 + \frac{|m|}{2} - \frac{em}{2|e|}$ . მეორე წევრი (5) გამოსახულებაში წარმოადგენს შესწორებას, რომელსაც იძლევა დრეკადი ძალის ზემოქმედება ნაწილაკის განივ მოძრაობაზე, ბოლო წევრი კი (5) გამოსახულებაში  $E_{ln_2} = \hbar \omega (n_2 + 1/2)$  შეესაბამება თავისუფალი რხევების ენერგიას მაგნიტური ველის გასწვრივ.

11.13. 
$$\Psi_m(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1)$$

$$E_m = \frac{\hbar^2 m^2}{2I} - \frac{e\hbar H m}{2\mu c}; \quad I = \mu a^2 \quad (2)$$

11.14. დავუშვათ არსებობენ ლოკალიზებული სტაციონარული მდგომარეობები. მაშინ მათი ენერგია  $E > 0$ , რადგანაც  $\hat{H} = (\hat{p} - e\vec{A}/c)^2$  ჰამილტონიანის საკუთარი მნიშვნელობები დადებითი სიდიდეებია. ამოცანის პირობის თანახმად,  $\vec{H}(\vec{r}) \rightarrow 0$  დიდ მანძილებზე, ამიტომ ვექტორული პოტენცილიც ისე შეგვიძლია ავირჩიოთ, რომ ისიც ნულისკენ მიდიოდეს უსასრულობაში, რის გამოც შრედინგერის განტოლება მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$\frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 \psi = E \psi, \quad (1)$$

რომელიც აღწერს თავისუფალი ნაწილაკის მოძრაობას, ანუ არ გვაქვს ლოკალიზებული სტაციონარული მდგომარეობები, რაც ეწინააღმდეგება საწყის დაშვებას.

11.15. ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi_{ps_z} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\frac{\vec{p}\vec{r}}{\hbar}} \chi_{s_z} \quad (1)$$

სადაც სპინური ფუნქციები ტოლია:

$$\chi_{s_z} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}; & s_z = +\frac{1}{2} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; & s_z = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (2)$$

ხოლო ენერგია კი იქნება:

$$E = \frac{p^2}{2\mu} - 2\mu_0 H s_z \quad (3)$$

11.16. ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi_{Es_z} = f(\rho, \varphi) \chi_{s_z}, \quad (1)$$

სადაც  $\chi_{s_z}$  სპინური ფუნქციაა და  $f(\rho, \varphi)$  ფუნქციის განსასაზღვრავად ამოცანა დადის შრედინგერის განტოლებაზე შემდეგ ორგანზომილებიან ველში:

$$U(\rho) = \begin{cases} -2\mu_0 H s_z = -U_0; & \rho < R \\ 0 & \rho > R \end{cases}, \quad (1)$$

სადაც  $\mu_0$  ნეიტრონის მაგნიტური მომენტი,  $R$  კი სოლენოიდის რადიუსი. ნეიტრონისათვის  $\mu_0 < 0$ , ამიტომ  $s_z = +1/2$ -თვის (1) პოტენციალი წარმოადგენს პოტენციურ ბარიერს და არ გვექნება დისკრეტული სპექტრი.  $s_z = -1/2$ -თვის  $U(\rho)$  პოტენციალი პოტენციური  $R$ -რადიუსიანი ორმოა  $U_0 = |\mu_0 H|$  სიღრმით. სტაციონარული მდგომარეობები ასეთ ორმოში შესწავლილი გვაქვს 4.48 და 4.49 ამოცანებში.

11.17. მითითებაში მოცემული პირობების გამო ტალღურ ფუნქციას ექნება შემდეგი სახე:

$$\Psi_{E p_z m s_z} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\hbar}} \exp\left[i\left(m\varphi + \frac{p_z z}{\hbar}\right)\right] f(\rho) \chi_{s_z}, \quad (1)$$

სადაც  $\chi_{s_z}$  სპინური ტალღური ფუნქციაა და  $f(\rho)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2} \right] f - 2\mu_0 s_z H(\rho) f = \left( E - \frac{p_z^2}{2\mu} \right) f \quad (2)$$

11.18. 
$$\Psi_{n p_y p_z s_z} = \Psi_{n p_y p_z}(x, y, z) \chi_{s_z} \quad (1)$$

$$E_{n p_z s_z} = \frac{\hbar|e|H_0}{\mu c} \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{p_z^2}{2\mu} - 2\mu_0 H_0 s_z \quad (2)$$

11.19. სხვა  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკებისათვის, რომელთათვისაც  $\mu_0 \neq \frac{e\hbar}{2\mu c}$ , არ არის სამართლიანი ჰამილტონიანის ამოცანის პირობაში მოცემული სახით ჩანერა.

11.20. სხვა  $s = 1/2$ -სპინიანი ნაწილაკებისათვის, რომელთათვისაც  $\mu_0 \neq \frac{e\hbar}{2\mu c}$ , არ შენარჩუნდება ეს შედეგი.

11.22. სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება ასე გამოიყურება:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} C_1(0)e^{i\omega t} \\ C_2(0)e^{-i\omega t} \end{pmatrix} \quad (1)$$

სადაც  $C_{1,2}(0)$  მუდმივები განისაზღვრებიან საწყისი პირობებიდან და ტალღური ფუნქციის ნორმირების მოთხოვნის გამო აკმაყოფილებენ პირობას:

$$|C_1|^2 + |C_2|^2 = 1. \quad (2)$$

სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები ტოლია:

$$\begin{aligned} \langle s_x(t) \rangle &= \langle s_x(0) \rangle \cos 2\omega t + \langle s_y(0) \rangle \sin 2\omega t \\ \langle s_y(t) \rangle &= \langle s_x(0) \rangle \sin 2\omega t - \langle s_y(0) \rangle \cos 2\omega t, \\ \langle s_z(t) \rangle &= \langle s_x(0) \rangle = \text{const} \end{aligned} \quad (3)$$

საიდანაც ჩანს, რომ  $\vec{s}(t)$  ვექტორი პრეცესირებს მაგნიტური ველის ირგვლივ  $2\omega$  კუთხური სიჩქარით.

11.23. სპინური ტალღური ფუნქციის დროზე დამოკიდებულება ასე გამოიყურება:

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} C_1(0)e^{i\xi t} \\ C_2(0)e^{-i\xi t} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

სადაც

$$\xi(t) = \frac{\mu}{\hbar} \int_0^t H(t) dt, \quad (2)$$

ხოლო სპინის ვექტორის კომპონენტების საშუალო მნიშვნელობები ისევ წინა, 11.22 ამოცანის (3) ფორმულებით მოიცემა, ოღონდ  $\omega t$  უნდა შევცვალოთ  $\xi(t)$ -თი. ასე რომ, ამ შემთხვევაში  $\vec{s}(t)$  ვექტორი პრეცესირებს მაგნიტური ველის ირგვლივ ზოგად შემთხვევაში არათანაბრად.

11.24. ნორმირებული სპინური ტალღური ფუნქციაა:

$$\Psi(t) = \frac{1}{2\omega} \begin{pmatrix} [(\omega + \gamma_1)e^{i\omega t} + (\omega - \gamma_1)e^{-i\omega t}] e^{-i\omega_0 t/2} \\ 2i\gamma_2 \sin \omega t \cdot e^{i\omega_0 t/2} \end{pmatrix} \quad (1)$$

სადაც

$$\gamma_1 = \frac{\mu H_0}{\hbar} + \frac{\omega_0}{2}; \quad \gamma_2 = \frac{\mu H_1}{\hbar}; \quad \omega = \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}, \quad (2)$$

ამიტომ სპინის გადაბრუნების ალბათობა ანუ  $t$  მომენტში იმის ალბათობა, რომ სპინის პროექცია იყოს  $s_z = -1/2$  იქნება:

$$W = g \sin^2 \omega t \quad (2)$$

სადაც

$$g = \left( \frac{\gamma_2}{\omega} \right)^2 = \frac{H_1^2}{H_1^2 + \left( H_0 + \frac{\hbar\omega_0}{2\mu} \right)^2}. \quad (3)$$

11.25.  $\langle \mu \rangle = \frac{e\hbar}{2\mu c} \langle l \rangle - \frac{e^2}{2\mu c^2} \langle [\vec{r} \cdot \vec{A}] \rangle.$

11.26.  $j_\rho = 0, j_z = \frac{ep_z}{\mu} |\Psi_{nmp_z}|^2, j_\phi = \left( \frac{e\hbar m}{\mu\rho} - \frac{e^2 H_0 \rho}{2\mu c} \right) |\Psi_{nmp_z}|^2.$

$$11.27. \quad j_\rho = j_z = 0, \quad j_z = -2\mu_0 c s_z \frac{\partial}{\partial \rho} |\Psi_{nmp_z}|^2$$

$$11.28. \quad \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 [\langle \vec{\sigma} \rangle \nabla f(r)], \quad (1)$$

სადაც

$$f(r) = \frac{1}{r} - \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{a} \right) e^{-\frac{2R}{a}} \quad (2)$$

და

$$a = \frac{\hbar^2}{Ze^2 \mu} \quad (3)$$

მაგნიტური  $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$  ველისათვის კი სათავეში და დიდ მანძილებზე გვექნება:

$$\vec{H}(0) = \frac{8\mu_0 \langle \vec{\sigma} \rangle}{3a^3} \quad (4)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} \frac{3(\vec{\mu} \vec{r}) \vec{r} - \vec{\mu} r^2}{r^5}. \quad (5)$$

როგორც (5) ფორმულიდან ჩანს, ატომიდან დიდ მანძილებზე ველი წარმოადგენს მაგნიტური დიპოლის ველს  $\vec{\mu} = \mu_0 \langle \vec{\sigma} \rangle$  მაგნიტური მომენტით.

$$11.29. \quad \vec{H} = \frac{8\pi\mu_0}{3} \langle \vec{\sigma} \rangle |\psi(0)|^2.$$

# ღამატიბა

## A. ზოგიერთი განსაზღვრული და განუსაზღვრელი ინტეგრალი

აჩვენეთ, რომ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.1})$$

განვიხილოთ ორი ერთნაირი ინტეგრალის ნამრავლი, რომელშიც გადახვალთ პოლარულ კოორდინატებზე, გექნებათ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr = 2\pi \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) = \pi,$$

საიდანაც მიიღება დასამტკიცებელი (A.1) თანაფარდობა.

ასევე ადვილად მიიღებთ, რომ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}; \quad a > 0. \quad (\text{A.2})$$

ცხადია, რომ ნებისმიერი მთელი  $k$  რიცხვისათვის:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k+1} e^{-x^2} dx = 0 \quad (\text{A.3})$$

რადგანაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია კენტია.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx$$

ტიპის ინტეგრალები შეიძლება ავიღოთ  $a$  პარამეტრით განარმოების მეთოდით. მართლაც, განვიხილოთ  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$  ინტეგრალის წარმოებული  $a$  პარამეტრით:

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx, \quad (\text{A.4})$$

მეორე მხრივ:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{A.5})$$

(A.4) და (A.5)-დან კი მიიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} \quad a > 0. \quad (\text{A.6})$$

ასევე  $a$  პარამეტრით  $k$ -ჯერ განზარმობით მიიღებთ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-ax^2} dx = (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial a^k} \left( \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right) = \frac{(2k-1)!!}{2^k} \frac{\sqrt{\pi}}{a^{2k+1/2}}; \quad a > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.7})$$

სადაც  $n!!$  აღნიშვნა ნიშნავს  $n$ -ის ლუნობის ყველა რიცხვის ნამრავლს 1 ან 2-დან  $n$ -მდე.

(A.7) გამოსახულებაში ინტეგრალქვეშა ფუნქციის ლუნობის გამო გექნებათ:

$$\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-x^2} dx, \quad (\text{A.8})$$

ამიტომ, ზემოთ განხილული ინტეგრალების ანალოგიურად მიიღებთ:

$$\int_0^{\infty} x^k e^{-ax^2} dx = \frac{k!}{a^{k+1}}; \quad a > 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.9})$$

ასევე ადვილად ითვლება შემდეგი ინტეგრალები:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^{2n}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2^n n! a^{2n+1}}, \quad a > 0 \quad (\text{A.10})$$

$$\int_a^b \frac{1}{x} \sqrt{(x-a)(x-b)} dx = \frac{\pi}{2} (a+b - 2\sqrt{ab}); \quad 0 < a < b \quad (\text{A.11})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 2,31 & n = 1/2 \\ \pi^2 / 6 & n = 1 \\ 2,405 & n = 2 \\ \pi^4 / 15 & n = 3 \\ 24,9 & n = 4 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

$$\int_0^{\alpha} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \begin{cases} 0,225 & \alpha = 1 \\ 1,18 & \alpha = 2 \\ 2,56 & \alpha = 3 \\ 4,91 & \alpha = 5 \\ 6,43 & \alpha = 10 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

$$\int x \sin^2(kx) dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin(2kx)}{4k} - \frac{\cos(2kx)}{8k^2} \quad (\text{A.15})$$

$$\int \sin(mx) \sin(nx) dx = \frac{\sin[(m-n)x]}{2(m-n)} - \frac{\sin[(m+n)x]}{2(m+n)}; \quad m^2 \neq n^2 \quad (\text{A.16})$$

## B. დირაკის დელტა ფუნქციის ზოგიერთი თვისება

დირაკის დელტა ფუნქცია ეწოდება ფუნქციას, რომელიც ასე განიმარტება:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0. \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

დელტა ფუნქცია არ წარმოადგენს ფუნქციას მათემატიკაში განმარტებული ფუნქციის აზრით. კერძოდ, დელტა ფუნქცია განიმარტება არა როგორც არგუმენტის ყველა მნიშვნელობისათვის მისი სიდიდის მოცემით (როგორც ჩვეულებრივი ფუნქცია), არამედ მოიცემა ინტეგრაციის წესით უწყვეტ ფუნქციასთან გამრავლებისას. ამიტომ დელტა ფუნქციას აკუთვნებენ განზოგადებულ ფუნქციათა კლასს.

ნებისმიერი უწყვეტი  $f(x)$  ფუნქციისათვის სამართლიანია ტოლობა:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x) dx = f(a). \quad (\text{B.2})$$

სრულდება რამდენიმე თანაფარდობა, რომელსაც აკმაყოფილებს დელტა ფუნქცია:

$$\delta(x) = \delta(-x) \quad (\text{B.3})$$

$$x\delta(x) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a) \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\delta(x-b) dx = \delta(a-b) \quad (\text{B.6})$$

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(x-x_i)}{\left| \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i}}, \quad (\text{B.7})$$

სადაც  $x_i$  მარტივი ფესვებია  $f(x) = 0$  განტოლების და  $n$  ნულების რაოდენობაა მთელ  $x$  დერძზე. მაგალითად, (B.7) თანაფარდობის კერძო შემთხვევებია შემდეგი ფორმულები:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x); \quad (\text{B.8})$$



$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x - a) + \delta(x + a)}{2|a|}. \quad (\text{B.9})$$

(B.3)-(B.9) თანაფარდობების არსი იმაში მდგომარეობს, რომ ისინი ერთნაირ შედეგებს იძლევიან, თუ ამ თანაფარდობების ორივე მხარეს ვაინტეგრებთ.

დელტა ფუნქციას აქვს შემდეგი ინტეგრალური წარმოდგენა:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk \quad (\text{B.10})$$

დელტა ფუნქციის წარმოებულები განისაზღვრება ტოლობით:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = (-1)^n f^{(n)}(0), \quad (\text{B.11})$$

სადაც  $n$  ნებისმიერი მთელი რიცხვია.

შემდეგი თვისებები შეიძლება დამტკიცდეს განზოგადებული ფუნქციების თეორიის ფარგლებში:

$$\delta^{(m)}(x) = (-1)^m \delta^{(m)}(-x) \quad (\text{B.12})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(m)}(x - y) \delta^{(n)}(y - a) dy = \delta^{(m+n)}(x - a) \quad (\text{B.13})$$

$$x^{m+1} \delta^{(m)}(x) = 0 \quad (\text{B.14})$$

პირველ წარმოებულს  $\delta'(x)$  შემდეგი თვისებები აქვს:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) f(x) dx = -f'(0) \quad (\text{B.15})$$

$$\delta'(x) = -\delta'(-x) \quad (\text{B.16})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x - y) \delta(y - a) dy = \delta'(x - a) \quad (\text{B.17})$$

$$x \delta'(x) = -\delta(x) \quad (\text{B.18})$$

$$x^2 \delta'(x) = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$\delta'(x) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k e^{ikx} dk \quad (\text{B.20})$$

რადგანაც  $\delta$  ფუნქცია ლუნი ფუნქციაა, ამიტომ სრულდება ტოლობა:

$$\int_0^a \delta(x) dx = \begin{cases} 1/2; & a > 0 \\ -1/2; & a < 0 \end{cases} \quad (\text{B.21})$$

დელტა ფუნქცია შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს, როგორც ზღვარი ჩვეულებრივი ფუნქციების მიმდევრობისა, კერძოდ:

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{\varepsilon}\right) \quad (\text{B.22})$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad (\text{B.23})$$

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \quad (\text{B.24})$$

სამგანზომილებიანი  $\delta$  ფუნქცია  $\delta(\vec{r})$  განიმარტება ტოლობით:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z) = (2\pi)^{-3} \int e^{i\vec{k}\vec{r}} d^3k, \quad (\text{B.25})$$

სადაც ინტეგრება ტარდება  $k_x, k_y, k_z$  ცვლადების ყველა მნიშვნელობებით.

$\delta(\vec{r})$  ფუნქციას შემდეგი თვისება გააჩნია:

$$\iint \delta(\vec{r}) F(\vec{r}) d^3r = F(0) \quad (\text{B.26})$$

თუ ინტეგრება წარმოებს იმ არეში, რომელიც მოიცავს  $\vec{r} = 0$  წერტილს. ასევე სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობები:

$$\delta(\vec{r}) = \frac{\delta(r)}{2\pi r^2} \quad (\text{B.27})$$

$$\delta(\vec{r}' - \vec{r}) = \frac{2}{r^2} \delta(\vec{n}' - \vec{n}) \delta(r' - r) \quad (\text{B.28})$$

სადაც  $\vec{n}'$  და  $\vec{n}$  ერთეულოვანი ვექტორებია  $\vec{r}'$  და  $\vec{r}$  მიმართულებით.

## C. სპეციალური ფუნქციები

### C.1. $\Gamma$ -ფუნქცია

$\Gamma$ -ფუნქცია წარმოადგენს ფაქტორიალის განზოგადებას:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \quad (\text{C.1.1})$$

ფაქტორიალი განმარტებულია მხოლოდ მთელი დადებითი რიცხვებისათვის და აკმაყოფილებს ტოლობას:

$$(n+1)! = (n+1)n! \quad (\text{C.1.2})$$

ფაქტორიალი შეიძლება წარმოადგინოთ ეილერის ინტეგრალის სახითაც:

$$n! = \int_0^{\infty} e^{-t} t^n dt, \quad (\text{C.1.3})$$

თუ შეთანხმდებით, რომ  $0! = 1$ .

$\Gamma$ -ფუნქცია საშუალებას გაძლევთ განაზოგადოთ (C.1.2) და (C.1.3) თანაფარდობანი ნებისმიერი კომპლექსური  $z = x + iy$  რიცხვისათვის:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z); \quad \Gamma(n+1) = n! \quad (C.1.4)$$

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (C.1.5)$$

თუ  $\operatorname{Re} z > 0$ . ასე განმარტებულ  $\Gamma$ -ფუნქციას აქვს პოლუსები უარყოფით ნამდვილ ღერძზე  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) წერტილებში და ნაშთი ამ წერტილებში

$\frac{(-1)^n}{n!}$ -ის ტოლია.

კერძო მნიშვნელობები:

$$\Gamma(1) = 0! = 1; \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}; \quad (C.1.6)$$

$$\Gamma\left(n + \frac{3}{2}\right) = \left(n + \frac{1}{2}\right)! = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1} n!} \sqrt{\pi} \quad (C.1.7)$$

სხვადასხვა არგუმენტის  $\Gamma$ -ფუნქციებს შორის კავშირი:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (C.1.8)$$

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{2z-1} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi} 3^{3z-1/2} \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right) \quad (C.1.9)$$

კომპლექსური რიცხვის

$$\Gamma(x + iy) = \xi e^{i\eta} \quad (C.1.10)$$

გამოსათვლელად შეიძლება ისარგებლოთ შემდეგი გაშლებით:

$$\xi = \Gamma(x) \prod_0^{\infty} \left[ 1 + \frac{y^2}{(x+n)^2} \right]^{-1/2} \quad (C.1.11)$$

და

$$\eta = y \left[ -C + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{y} \operatorname{arctg} \frac{y}{x+n-1} \right) \right], \quad (C.1.12)$$

სადაც

$$C = \int_0^{\infty} e^{-t} \ln \frac{1}{t} dt = 0,577215\dots \quad (C.1.13)$$

ეილერის მუდმივაა. კერძო შემთხვევაში, როცა  $x = 1$ , გვაქვს:

$$\xi^2 = |\Gamma(1+iy)|^2 = \frac{\pi y}{sh\pi y} \quad (C.1.14)$$

ასიმპტოტური ყოფაქცევა.

$|z| \gg 1$  და  $|\arg z| < \pi$ -თვის შეიძლება გამოიყენოთ სტირლინგის ფორმულა:

$$\ln \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) \ln z - z + \frac{1}{2} \ln 2\pi + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (C.1.15)$$

ან

$$\Gamma(z) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{z}} e^{z(\ln z - 1)} \quad (C.1.16)$$

### C.2. გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია. ზოგიერთი ინტეგრალი გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციებით

G გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია განიმარტება შემდეგი მწკრივით:

$$F(a, c; z) = 1 + \frac{a z}{c \cdot 1!} + \frac{a(a+1) z^2}{c(c+1) 2!} + \dots, \quad (C.2.1)$$

სადაც  $a$  და  $c$  ნებისმიერი პარამეტრებია, გარდა  $c = -n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  როცა  $a = c$ , მაშინ  $F(a, c; z)$  ფუნქცია ექსპონენციალურ ფუნქციაში გადადის:

$$F(a, a; z) = e^z \quad (C.2.2)$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს ერთ-ერთ კერძო ამონახსნს შემდეგი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა:

$$z \frac{d^2 \Phi}{dz^2} + (c - z) \frac{d\Phi}{dz} - a\Phi = 0 \quad (C.2.3)$$

ანუ  $\Phi_1 = F(a, c; z)$ . როცა  $c$  არ არის მთელი რიცხვი, მაშინ (C.2.3) განტოლების მეორე დამოუკიდებელი ამონახსნია:

$$\Phi_2 = z^{1-c} F(a - c + 1, 2 - c; z) \quad (C.2.4)$$

ამ შემთხვევაში (C.2.3) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$\Phi = A\Phi_1 + B\Phi_2, \quad (C.2.5)$$

სადაც  $A$  და  $B$  ნებისმიერი მუდმივებია.  $F(a, c; z)$  ფუნქცია რეგულარულია  $z = 0$  წერტილში და  $F(a, c, 0) = 1$ . ის აკმაყოფილებს ე.წ. კუმერის თანაფარდობას:

$$F(a, c, z) = e^z F(c - a, c; -z). \quad (C.2.6)$$

$F(a, c; z)$  ფუნქცია აკმაყოფილებს შემდეგ თანაფარდობებსაც:

$$(c - a)F(a - 1, c; z) + (2a - c + z)F(a, c; z) = aF(a + 1, c; z) \quad (C.2.7)$$

$$(a - c + 1)F(a, c; z) + (c - 1)F(a, c - 1; z) = aF(a + 1, c; z) \quad (C.2.8)$$

$$\frac{d}{dz} F(a, c; z) = \frac{a}{c} F(a + 1, c + 1; z). \quad (C.2.9)$$

თუ თანმიმდევრობით გამოიყენებთ (C.2.7) - (C.2.9) ფორმულებს, მიიღებთ:

$$\frac{d^n}{dz^n} F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\Gamma(c+n)} F(a+n, c+n; z). \quad (C.2.10)$$

თუ  $a = -n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ , მაშინ გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია დადის  $n$  რიგის პოლინომზე;

$$F(-n, c; z) = 1 - \frac{n z}{c!} + \frac{n(1-n) z^2}{c(c+1) 2!} + \dots + (-1)^n \frac{(c-1)!}{(c+n-1)!} z^n. \quad (C.2.11)$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია (C.2.11) დაკავშირებულია განზოგადებულ ლაგერის პოლინომებთან შემდეგი ტოლობით:

$$L_n^c(z) = \frac{\Gamma(c+n+1)}{\Gamma(c+1)} F(-n, c+1; z). \quad (C.2.12)$$

განზოგადებულ ლაგერის პოლინომებს, როცა  $c = 0$ , ეწოდებათ ლაგერის პოლინომები და აღინიშნებიან ასე:  $L_n(z)$ . (C.2.11) და (C.2.12)-დან კი გვექნება:

$$L_n(z) = e^z \frac{d^n}{dz^n} (z^n e^{-z}) = \Gamma(n+1) F(-n, 1; z). \quad (C.2.13)$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ყოფაქცევა მცირე  $z$ -ებისთვის განისაზღვრება (C.2.1) მწკრივის პირველი წევრებით, ხოლო დიდი  $z$ -ებისთვის გვაქვს:

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)} z^{a-c} e^z \left[ 1 + O(|z|^{-1}) \right] \quad \text{თუ } \operatorname{Re} z \rightarrow \infty \quad (C.2.14)$$

$$F(a, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} \left[ 1 + O(|z|^{-1}) \right] \quad \text{თუ } \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty \quad (C.2.15)$$

როდესაც  $F(a, c; z)$  ფუნქციის არგუმენტი  $z$  შემოსაზღვრულია, ხოლო ერთ-ერთი პარამეტრი უსასრულოდ იზრდება, გვაქვს შემდეგი ასიმპტოტური გაშვებები:

$$F(a, c; z) = 1 + O(|c|^{-1}), \text{ თუ } z \text{ და } a \text{ სასრულია, ხოლო } c \rightarrow \infty \quad (\text{C.2.16})$$

$$F(a, c; z) = e^z \left[ 1 + O(|c|^{-1}) \right], \text{ თუ } c - a \text{ და } z \text{ სასრულია, ხოლო } c \rightarrow \infty. \quad (\text{C.2.17})$$

გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის დიდი მნიშვნელობა ფიზიკაში იმასთანაა დაკავშირებული, რომ ამ ფუნქციის საშუალებით გამოისახება მრავალი წრფივი ერთგვაროვანი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი. მაგალითად, განიხილეთ განტოლება:

$$(a_0x + b_0) \frac{d^2\varphi}{dx^2} + (a_1x + b_1) \frac{d\varphi}{dx} + (a_2x + b_2)\varphi = 0 \quad (\text{C.2.18})$$

როცა  $a_0 = a_1 = a_2 = 0$ , ამ განტოლების ამონახსნი გამოიხატება ელემენტარული ფუნქციებით და ამიტომ მას არ განიხილავთ. (C.2.18) განტოლება

$$\varphi = e^{\lambda x} \Phi, \quad x = \lambda z + \mu \quad (\text{C.2.19})$$

ჩასმით, შემდეგ განტოლებაზე დადის:

$$(\alpha_0 z + \beta_0) \frac{d^2\Phi}{dz^2} + (\alpha_1 z + \beta_1) \frac{d\Phi}{dz} + (\alpha_2 z + \beta_2)\Phi = 0, \quad (\text{C.2.20})$$

სადაც

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\lambda}, \quad \alpha_1 = A_1, \quad \alpha_2 = \lambda A_2; \quad (\text{C.2.21})$$

$$\beta_0 = \frac{a_0\mu + b_0}{\lambda^2}, \quad \beta_1 = \frac{\mu A_1 + B_1}{\lambda}, \quad \beta_2 = \mu A_2 + B_2; \quad (\text{C.2.22})$$

$$A_1 = 2a_0\nu + a_1, \quad A_2 = a_0\nu^2 + a_1\nu + a_2; \quad (\text{C.2.23})$$

$$B_1 = 2b_0\nu + b_1, \quad B_2 = b_0\nu^2 + b_1\nu + b_2; \quad (\text{C.2.24})$$

თუ  $\lambda, \mu$  და  $\nu$  კოეფიციენტებს ისე განსაზღვრავთ, რომ სრულდებოდეს პირობები:

$$a_0\mu + b_0 = 0, \quad a_0 + \lambda A_1 = 0, \quad A_2 = 0 \quad (\text{C.2.25})$$

მაშინ (C.2.20) განტოლება ემთხვევა (C.2.3) განტოლებას. ამიტომ (C.2.18) ტიპის ნებისმიერი განტოლება დადის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების (C.2.3) განტოლებაზე, თუ მოხერხდა  $\lambda, \mu$  და  $\nu$  კოეფიციენტების ისე შერჩევა, რომ კმაყოფილდებოდეს (C.2.25) განტოლება, ხოლო შემდეგ გამოიყენებთ (C.2.19) ჩასმას.

$$\Phi = z^{-\frac{c}{2}} e^{\frac{z}{2}} W, \quad a = \frac{1}{2} - k + \mu, \quad c = 1 + 2\mu \quad (\text{C.2.26})$$

ჩასმით (C.2.3) განტოლება დადის უიტეკერის განტოლებაზე

$$\frac{d^2 W}{dz^2} + \left( -\frac{1}{4} + \frac{k}{z} + \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2} \right) W = 0 \quad (\text{C.2.27})$$

უიტეკერის  $W_{k\mu}(z)$  ფუნქცია, რომელიც აკმაყოფილებს (C.2.27) განტოლებას, განისაზღვრება შემდეგი ინტეგრალით:

$$W_{k\mu}(z) = \frac{z^k e^{-\frac{z}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - k + \mu\right)} \int_0^\infty t^{-k-\frac{1}{2}+\mu} \left(1 + \frac{t}{z}\right)^{k-\frac{1}{2}+\mu} e^{-t} dt \quad (\text{C.2.28})$$

$k$  და  $\mu$ -ს ყველა მნიშვნელობისათვის.  $z$ -თვის ასევე დასაშვებია ყველა მნიშვნელობა, გარდა ნამდვილი უარყოფითი მნიშვნელობებისა. თუ  $W_{k\mu}(z)$  ფუნქცია (C.2.27) განტოლების ამონახსნია, მაშინ  $W_{-k\mu}(-z)$ -იც (C.2.27) განტოლების ამონახსნია, რადგანაც  $k$  და  $z$ -თვის ერთდროულად ნიშნების შეცვლისას არ იცვლება განტოლება.

$W_{k\mu}(z)$  და  $W_{-k\mu}(-z)$  ფუნქციები ადგენენ (C.2.27) განტოლების ამონახსნთა ფუნდამენტალურ სისტემას.

მრავალი ფუნქცია შეიძლება გამოისახოს  $W_{k\mu}(z)$  უიტეკერის ფუნქციით. ასე მაგალითად, ლაგერის განზოგადებული პოლინომები წარმოადგენენ უიტეკერის ფუნქციების კერძო შემთხვევას, თუ მათში ავიღებთ:

$$k = n + \frac{1}{2}(c+1); \mu = \frac{c}{2} \quad (\text{C.2.29})$$

ანუ

$$L_n^c(z) = (-1)^n z^{-\frac{c+1}{2}} e^{\frac{z}{2}} W_{n+\frac{c+1}{2}, \frac{c}{2}}(z) \quad (\text{C.2.30})$$

$c = \pm \frac{1}{2}$  დროს ლაგერის პოლინომები გადადიან ერმიტის პოლინომებში:

$$H_n(z) = (-1)^n e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} \left( e^{-\frac{z^2}{2}} \right), \quad (\text{C.2.31})$$

რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი განტოლების ამონახსნებს:

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + 2n \right) H_n(z) = 0 \quad (\text{C.2.32})$$

კერძოდ:

$$H_{2n}(z) = (-1)^n 2^n L_n^{\frac{1}{2}}(z^2) \quad (\text{C.2.33})$$

$$H_{2n+1}(z) = (-1)^n 2^{2n+1} z L_n^{\frac{1}{2}}(z^2) \quad (\text{C.2.34})$$

უიტეკერის ფუნქციის ასიმპტოტური ფორმულა დიდი  $z$ -ებისთვის ( $|\arg(z)| < \pi$ ) მოიცემა ფორმულით:

$$W_{\mu k}(z) = e^{-\frac{z}{2}} z^k \left(1 + O(z^{-1})\right) \quad (\text{C.2.35})$$

ამ თავის ბოლოს იხილეთ, დამტკიცების გარეშე, ზოგიერთი ინტეგრალის მნიშვნელობები, როდესაც ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არის გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია:

$$\text{ა) } J_{\alpha\gamma}^{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\nu} F(\alpha, \gamma, kz) dz = \Gamma(\gamma+1) \lambda^{-\gamma-1} F\left(\alpha, \nu+1, \gamma, \frac{k}{\lambda}\right); \quad (\text{C.2.36})$$

(C.2.36) ინტეგრალის კრებადობისათვის აუცილებელია მოითხოვოთ, რომ:  $\text{Re } \nu > -1$ ;  $\text{Re } \lambda > |\text{Re } k|$ .

$$\text{ბ) } J_{\nu} = \int_0^{\infty} e^{-kz} z^{\nu-1} [F(-n, \gamma, kz)]^2 dz; \quad \text{Re } \nu > 0, n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{C.2.37})$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ:

$$J_{\nu} = \frac{\Gamma(\nu)n!}{k^{\nu} \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+n-1)} \left\{ 1 + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{n(n-1)\dots(n-s)(\gamma-\nu-s-1)(\gamma-\nu-s)\dots(\gamma-\nu+s)}{[(s+1)!]^2 \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+s)} \right\} \quad (\text{C.2.38})$$

$$\text{გ) } J = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\gamma-1} F(\alpha, \gamma, kz) F(\alpha', \gamma, k'z) dz. \quad (\text{C.2.39})$$

აქაც შეიძლება აჩვენოთ, რომ:

$$J = \Gamma(\gamma) \lambda^{\alpha+\alpha'-\gamma} (\lambda-k)^{-\alpha} (\lambda-k')^{-\alpha'} F\left(\alpha, \alpha', \gamma, \frac{kk'}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right) \quad (\text{C.2.40})$$

როცა  $\alpha = n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$  (ან  $\alpha' = n$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ), მაშინ (C.2.40) გამოსახულებამ შეიძლება შემდეგი სახე მიიღოს:

$$J = \frac{\Gamma^2(\gamma) \Gamma(\gamma+n-\alpha')}{\Gamma(\gamma+n) \Gamma(\gamma-\alpha')} \lambda^{-n+\alpha'-\gamma} (\lambda-k)^n (\lambda-k')^{-\alpha'} \times \\ \times F\left(-n, \alpha', -n+\alpha'+1-\gamma, \frac{\lambda(\lambda-k-k')}{(\lambda-k)(\lambda-k')}\right) \quad (\text{C.2.41})$$



### C.3. ბესელისა და ეირის ფუნქციები

ბესელის ფუნქციები წარმოადგენენ ბესელის განტოლების

$$\frac{d^2 J_p}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dJ_p}{dz} + \left(1 - \frac{p^2}{z^2}\right) J_p = 0 \quad (C.3.1)$$

ამონახსნებს. ამ განტოლების ერთ-ერთი კერძო ამონახსნი განისაზღვრება შემდეგი მწკრივით:

$$J_p(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k} \quad (C.3.2)$$

და ეწოდება  $p$  რიგის პირველი გვარის ბესელის ფუნქცია. თუ  $p$  არამთელი რიცხვია, მაშინ  $J_p(z)$  და  $J_{-p}(z)$  წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია.

ამ შემთხვევაში (C.3.1) განტოლების ზოგადი ამონახსნია:

$$J(z) = AJ_p(z) + BJ_{-p}(-z) \quad (C.3.3)$$

სადაც  $A$  და  $B$  ნებისმიერი მუდმივებია.

ბესელის ფუნქცია დაკავშირებულია გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან შემდეგი თანაფარდობით:

$$J_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p e^{-iz} F\left(\frac{1}{2} + p, 1 + 2p; 2iz\right). \quad (C.3.4)$$

თუ  $p = n$  მთელი რიცხვია, მაშინ  $J_n(z)$  და  $J_{-n}(z)$  ამონახსნები ერთმანეთთან ასეა დაკავშირებული:

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z). \quad (C.3.5)$$

დიდი  $z$ -თვის  $J_p(z)$  ფუნქციას შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გააჩნია:

$$J_p(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[ \cos\left(z - \frac{\pi p}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-1}) \right]. \quad (C.3.6)$$

თუ  $p$  არამთელი რიცხვია, მაშინ (C.3.1) განტოლების ერთ-ერთ ამონახსნად იღებენ  $p$  რიგის ნეიმანის ფუნქციას (ანუ ბესელის მეორე გვარის ფუნქციას):

$$N_p(z) = \frac{J_p(z) \cos p\pi - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}. \quad (C.3.7)$$

$N_p(z)$  ნეიმანის და  $J_p(z)$  ბესელის ფუნქციები ასევე წარმოადგენენ (C.3.1) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნს.

(C.3.1) განტოლების ორ დამოუკიდებელ ამონახსნად ასევე იხილავენ ჰანკელის პირველი და მეორე გვარის ფუნქციებს (ანუ ბესელის მესამე გვარის ფუნქციებს):

$$H_p^{(1)}(z) = i \frac{J_p(z)e^{-ip\pi} - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}, \quad H_p^{(2)}(z) = -i \frac{J_p(z)e^{ip\pi} - J_{-p}(z)}{\sin p\pi}. \quad (C.3.8)$$

ამა თუ იმ ფუნქციის (C.3.1) განტოლების დამოუკიდებელ ამონახსნად არჩევას განსაზღვრავს ამ ფუნქციების ყოფაქცევა არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის. დიდი  $z$ -თვის ჰანკელის ფუნქციებს შემდეგი ასიმპტოტური ყოფაქცევა გააჩნიათ:

$$N_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O(|z|^{-1})\right] \quad (C.3.9)$$

$$N_p^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i\left(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O(|z|^{-1})\right]. \quad (C.3.10)$$

ბესელის ფუნქციები, რომელთა ინდექსი მთელი რიცხვის ნახევარია, ელემენტარულ ფუნქციებში გამოისახებიან. ასე მაგალითად, ნებისმიერი მთელი  $l$ -თვის:

$$J_{l+1/2}(z) = (-1)^l \sqrt{\frac{2z}{\pi}} z^l \left(\frac{d}{zdz}\right)^l \left(\frac{\sin z}{z}\right) \quad (C.3.11)$$

$$J_{-l-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} z^l \left(\frac{d}{zdz}\right)^l \left(\frac{\cos z}{z}\right). \quad (C.3.12)$$

ჩვეულებრივ, (C.3.11) და (C.3.12) ფუნქციების ნაცვლად იყენებენ შემდეგ სფერულ ბესელის ფუნქციებს:

$$j_l(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{l+1/2}(z) = (-1)^l z^l \left(\frac{d}{zdz}\right)^l \left(\frac{\sin z}{z}\right) \quad (C.3.13)$$

$$\eta_l(z) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{-l-1/2}(z) = (-1)^{l+1} z^l \left(\frac{d}{zdz}\right)^l \left(\frac{\cos z}{z}\right). \quad (C.3.14)$$

თუ  $J_p(z)$  არის (C.3.1) ბესელის განტოლების ამონახსნი, მაშინ  $J_p(iz)$  არის შემდეგი განტოლების ამონახსნი:

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dI}{dz} - \left(1 + \frac{p^2}{z^2}\right) I = 0. \quad (C.3.15)$$

ამ განტოლების ამონახსნს შემდეგი მწკრივის სახით ირჩევენ:

$$I_p(z) = J_p(iz) e^{-i\frac{p\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{p+2k}. \quad (C.3.16)$$

$I_p(z)$  ფუნქციას ეწოდება ბესელის პირველი გვარის მოდიფიცირებული ფუნქცია. თუ  $p$  არამთელი რიცხვია, მაშინ  $I_p(z)$  და  $I_{-p}(z)$  წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებია, რომელთა საშუალებით გამოისახება (C.3.15) განტოლების ზოგადი ამონახსნი. თუ  $p = n$  მთელი რიცხვია, მაშინ:

$$I_p(z) = I_{-p}(z). \quad (\text{C.3.17})$$

პირველი გვარის ბესელის მოდიფიცირებული ფუნქცია დაკავშირებულია გადაგვარებულ ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციასთან შემდეგი თანაფარდობით:

$$I_p(z) = \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p e^{-z} F\left(\frac{1}{2} + p, 1 + 2p; 2z\right). \quad (\text{C.3.18})$$

სწორად (C.3.15) განტოლების მეორე დამოუკიდებელ ამონახსნად არამთელი  $p$ -თვის განიხილავენ შემდეგ ფუნქციას:

$$K_p(z) = \frac{\pi I_{-p}(z) - I_p(z)}{2 \sin p\pi}, \quad (\text{C.3.19})$$

რომელსაც *მაკდონადის ფუნქცია* ანუ მეორე გვარის ბესელის მოდიფიცირებული ფუნქცია ეწოდება. ამ ფუნქციას შემდეგი ყოფაქცევა აქვს  $z \rightarrow \infty$ -თვის და  $z \rightarrow 0$ -თვის:

$$K_p(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} [1 + O(z^{-1})]; \quad z > 0 \quad (\text{C.3.20})$$

$$K_p(z) = \frac{1}{z}; \quad z > 0. \quad (\text{C.3.21})$$

ბესელის ფუნქციებთან დაკავშირებულია ე.წ.  $Ai(z)$  ეირის ფუნქციები, რომლებიც წარმოადგენენ შემდეგი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნებს:

$$W'' - zW = 0. \quad (\text{C.3.22})$$

ეირის და ბესელის ფუნქციებს შორის გვაქვს შემდეგი კავშირი:

$$Ai(z) = \frac{1}{3} \sqrt{z} \left[ I_{-1/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) - I_{1/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right] = \pi^{-1} \sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \quad (\text{C.3.23})$$

$$Ai(-z) = \frac{1}{3} \sqrt{z} \left[ J_{-1/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) + J_{1/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right) \right], \quad (\text{C.3.24})$$

ხოლო მისი წარმოებულისათვის გვაქვს ფორმულა:

$$Ai'(z) = -\pi^{-1} \left( \frac{z}{\sqrt{3}} \right) K_{2/3} \left( \frac{2}{3} z^{3/2} \right). \quad (\text{C.3.25})$$

ერის ფუნქციას არგუმენტის დიდი მნიშვნელობებისათვის შემდეგი სახე აქვს:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} Ai(z) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{z^{1/4}} e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}. \quad (C.3.26)$$

#### C.4. ლეჟანდრის პოლინომები

ლეჟანდრის პოლინომები  $P_l(\cos \theta)$  ასე განიმარტებიან:

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{(d \cos \theta)^l} (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (C.4.1)$$

ისინი აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_l}{d\theta} \right) + l(l+1)P_l = 0 \quad (C.4.2)$$

ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები ასე განიმარტებიან:

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^m} = \frac{1}{2^l l!} \sin^m \theta \frac{d^{l+m}}{(d \cos \theta)^{l+m}} (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (C.4.3)$$

ან ეკვივალენტური ფორმით:

$$P_l^m(\cos \theta) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)! 2^l l!} \sin^{-m} \theta \frac{d^{l-m}}{(d \cos \theta)^{l-m}} (\cos^2 \theta - 1)^l \quad (C.4.4)$$

ამასთან,  $m = 0, 1, \dots, l$ . ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ განტოლებას:

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP_l^m}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_l^m = 0 \quad (C.4.5)$$

ლეჟანდრის პოლინომები და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ ორთონორმირების შემდეგ პირობებს:

$$\int_{-1}^1 P_k(u) P_l(u) du = \frac{2}{2l+1} \delta_{kl} \quad (C.4.6)$$

$$\int_{-1}^1 P_k^m(u) P_l^m(u) du = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{kl}, \quad (C.4.7)$$

სადაც

$$u = \cos \theta \quad (C.4.8)$$

ლეჟანდრის პოლინომები და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომები აკმაყოფილებენ შემდეგ რეკურენტულ თანაფარდობებს:

$$(l+1)P_{l+1}(u) + lP_{l-1}(u) = (2l+1)uP_l(u) \quad (C.4.9)$$

$$(1-u^2)\frac{dP_l}{du} = l(P_{l-1} - uP_l) = (l+1)(uP_l - P_{l+1}) \quad (C.4.10)$$

$$(2l+1)uP_l^m = (l+1-m)P_{l+1}^m + (l+m)P_{l-1}^m \quad (C.4.11)$$

$$(1-u^2)\frac{dP_l^m}{du} = -luP_l^m + (l+m)P_{l-1}^m = (l+1)uP_l^m - (l+1-m)P_{l+1}^m \quad (C.4.12)$$

ლეჟანდრის პოლინომების და ლეჟანდრის მიკავშირებული პოლინომების კერძო მნიშვნელობებია:

$$P_l(1) = 1; P_l(-1) = (-1)^l \quad (C.4.13)$$

$$P_l^m(1) = P_l^m(-1) = 0: m \neq 0 \quad (C.4.14)$$

$$P_l^m(0) = \begin{cases} (-1)^p \frac{(2p+2m)!}{2^l p!(p+m)!}: l-m=2p; \\ 0; & l-m=2p+1. \end{cases} \quad (C.4.15)$$

ლეჟანდრის პოლინომების პირველი ხუთი მნიშვნელობაა:

$$P_0 = 1; P_1 = u; P_2 = \frac{1}{2}(3u^2 - 1); P_3 = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u); P_4 = \frac{1}{8}(35u^4 - 30u^2 + 3). \quad (C.4.16)$$

### C.5. ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია განიხილება შემდეგი მწკრივით, როცა  $|z| < 1$ :

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots \quad (C.5.1)$$

ზემოთ განხილული გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია (C.2.1) მიიღება (C.5.1) ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციიდან შემდეგი ზღვრული გადასვლით:

$$F(\alpha, \gamma, z) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{z}{\beta}\right). \quad (C.5.2)$$

უნდა აღინიშნოს, რომ ლიტერატურაში ხშირად ჰიპერგეომეტრიულ ფუნქციას ასეც აღნიშნავენ:  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$ , ხოლო გადაგვარებული ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისთვის კი შემოაქვთ აღნიშვნა:  ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ . ამ აღნიშვნებში  $F$  ასოს მარცნივ და მარჯვნივ ინდექსები სათანადოდ მიუთითებენ პარამეტრების რიცხვს (C.5.1) და (C.2.1) გაშლების მრიცხველში და მნიშვნელში.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია წარმოადგენს ერთ-ერთ კერძო ამონახსნს შემდეგი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლებისა:

$$z(1-z)u'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]u' - \alpha\beta u = 0 \quad (C.5.3)$$

$\alpha$  და  $\beta$  პარამეტრები ნებისმიერია  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  ფუნქციაში, ხოლო  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$  ცხადია, რომ  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  ფუნქცია სიმეტრიულია  $\alpha$  და  $\beta$  პარამეტრების მიმართ.

(C.5.3) განტოლების მეორე კერძო ამონახსნია:

$$u = z^{1-\gamma} F(\beta - \gamma + 1, \alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z), \quad (C.5.4)$$

რომელსაც გააჩნია განსაკუთრებული  $z = 0$  წერტილი.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისათვის სამართლიანია შემდეგი თანაფარდობანი:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z) \quad (C.5.5)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = (1-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z}{z-1}\right) \quad (C.5.6)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-z) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma+1-\alpha-\beta, 1-z) \end{aligned} \quad (C.5.7)$$

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z) &= \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{z}\right) + \\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-z)^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{z}\right) \end{aligned} \quad (C.5.8)$$

შევნიშნოთ, რომ (C.5.8) ფორმულა, რომელიც აკავშირებს  $z$ -ს და  $1/z$ -ს, გამოსახავს  $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$  ფუნქციას მწკრივის სახით, რომელიც იკრიბება  $|z| > 1$ -თვის ანუ წარმოადგენს საწყისი (C.5.1) მწკრივის ანალიზურ გაგრძელებას. თუ ალფა ან ბეტა მთელი უარყოფითი  $n$  რიცხვია, მაშინ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია დადის  $n$  რიგის პოლინომზე და შეიძლება წარმოდგენილ იქნეს შემდეგი სახით:

$$F(-n, \beta, \gamma, z) = \frac{z^{1-\gamma}(1-z)^{\gamma+n-\beta}}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\dots(\gamma+n-1)} \frac{d^n}{dz^n} [z^{\gamma+n-1}(1-z)^{\beta-\gamma}] \quad (C.5.9)$$

ეს პოლინომები მამრავლის სიზუსტით ემთხვევიან იაკობის პოლინომებს, რომლებიც შემდეგნაირად არიან განმარტებული:

$$P_n^{(a,b)}(z) = \frac{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}{n!} F\left(-n, a+b+n+1, a+1, \frac{1-z}{z}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^n n!} (1-z)^{-a} (1+z)^{-b} \frac{d^n}{dz^n} \left[ (1-z)^{a+n} (1+z)^{b+n} \right] \quad (\text{C.5.10})$$

$a = b = 0$ -თვის იაკობის პოლინომები ემთხვევიან ლეჟანდრის პოლინომებს,  $n = 0$ -თვის კი  $P_0^{(a,b)} = 1$

#### **D. მიახლოებითი გამოთვლის ფორმულები**

თუ  $x \ll 1$ , მაშინ პირველ მიახლოებაში სამართლიანია შემდეგი მიახლოებითი ფორმულები:

$$1) \quad \frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x; \quad 2) \quad (1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2x; \quad 3) \quad (1 \pm x)^3 \approx 1 \pm 3x; \quad 4)$$

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{1}{2}x;$$

$$5) \quad \sqrt[3]{1 \pm x} \approx 1 \mp \frac{1}{3}x; \quad 6) \quad \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} \approx 1 \mp \frac{1}{2}x; \quad 7) \quad \sqrt{1-x^2} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2;$$

$$8) \quad \frac{1}{1-x^2} \approx 1 + \frac{1}{2}x^2; \quad 9) \quad \ln(1+x) \approx x; \quad 10) \quad \ln \frac{1+x}{1-x} \approx 2x$$

**E. ენერჯიის ერთეულები**

ერთეულები	ერგი	ჯოული	კვანტ.საათი	კალორია	ევ	მაე
ერგი	1	$10^{-7}$	$2,78 \cdot 10^{-14}$	$2,38 \cdot 10^{-8}$	$6,24 \cdot 10^{11}$	$6,7 \cdot 10^2$
ჯოული	$10^7$	1	$2,78 \cdot 10^{-7}$	0,239	$6,24 \cdot 10^{18}$	$6,70 \cdot 10^9$
კვანტ.საათი	$3,6 \cdot 10^{13}$	$3,6 \cdot 10^6$	1	$8,60 \cdot 10^5$	$2,25 \cdot 10^{25}$	$2,41 \cdot 10^{16}$
კალორია	$4,18 \cdot 10^7$	4,185	$1,16 \cdot 10^{-6}$	1	$2,61 \cdot 10^{19}$	$2,80 \cdot 10^{16}$
ელექტრონ-ვოლტი (ევ)	$1,60 \cdot 10^{-12}$	$1,60 \cdot 10^{-19}$	$4,45 \cdot 10^{-26}$	$3,83 \cdot 10^{-20}$	1	$1,07 \cdot 10^{-9}$
მასის ატომური ერთეული (მაე)	$1,49 \cdot 10^{-3}$	$1,49 \cdot 10^{-10}$	$4,14 \cdot 10^{-17}$	$3,56 \cdot 10^{-11}$	$9,31 \cdot 10^8$	1



**F. ძირითადი ფიზიკური მუდმივები**

1	სინათლის სიჩქარე ვაკუუმში	$c = 2,998 \cdot 10^8$ მ/წმ
2	გრავიტაციული მუდმივა	$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11}$ მ <sup>3</sup> /კგ.სმ <sup>2</sup>
3	ავოგადროს რიცხვი	$N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$ მოლ <sup>-1</sup>
4	ელექტრონის მუხტი	$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ კულონი
5	ელექტრონის მასა	$m_e = 0,911 \cdot 10^{-27}$ გ = 0,511 მეგე = = 5,486 · 10 <sup>-4</sup> მაე
6	პროტონის მასა	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-24}$ გ = 938,28 მეგე = 1,007 მაე
7	პლანკის მუდმივა	$h = 6,625 \cdot 10^{-27}$ ერგი.წმ
8	რიდბერგის მუდმივა უსასრულო მასის ბირთვის მქონე ატომისათვის	$R_\infty = 109737,31$ სმ <sup>-1</sup>
9	რიდბერგის მუდმივა წყალბადისათვის	$R_H = 109677,576$ სმ <sup>-1</sup>
10	ბორის პირველი ორბიტის რადიუსი	$r_1 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ სმ
11	წყალბადის ატომის იონიზაციის ენერგია	$I_0 = 13,56$ ევ
12	კომპტონის ტალღის სიგრძე ელექტრონისათვის	$\lambda_c = 2,426 \cdot 10^{-10}$ სმ
13	ელექტრონის კლასიკური რადიუსი	$r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$ სმ
14	ნაზი სტრუქტურის მუდმივა	$\alpha = \frac{1}{137,036}$
15	ბორის მაგნეტონი	$\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-20}$ ერგი/გაუსი = = 0,927 · 10 <sup>-23</sup> ჯოული/ტესლა
16	ბირთვული მაგნეტონი	$\mu_N = 5,051 \cdot 10^{-24}$ ერგი/გაუსი = = 5,051 · 10 <sup>-27</sup> ჯოული/ტესლა
17	მაგნიტური მომენტი ა) ელექტრონის	ა) $\mu_e = 1,00116 \mu_B$

	ბ) პროტონის გ) ნეიტრონის დ) დეიტრონის	ბ) $\mu_p = 2,7928\mu_N$ გ) $\mu_n = -1,913\mu_N$ დ) $\mu_\alpha = 0,8574\mu_N$
18	გირომაგნიტური მამრავლი ა) ელექტრონის ბ) პროტონის გ) ნეიტრონის დ) დეიტრონის	ა) $g_e = 2,0022$ ბ) $g_p = 5,5855$ გ) $g_n = -3,8263$ დ) $g_\alpha = 0,8574$
19	ელექტრული მუდმივა	$\epsilon_0 = 0,885 \cdot 10^{-11}$ ფ/მ
20	მაგნიტური მუდმივა	$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6}$ ჰენრი/მ
21	ერთი ელექტრონვოლტის შესაბამისი რხევის სიხშირე	$2,41804 \cdot 10^{14}$ ჰერცი
22	ერთი ელექტრონვოლტის შესაბამისი ტემპერატურა	4604,9 კელვინი

**G. ორატომიანი მოლეკულის მუდმივები**

მოლეკულა	ძირითადი თერმი	ბირთვებს შორის მანძილი	რხევის სიხშირე $\omega, 10^{14} \text{ cm}^{-1}$	ანჰარმონიულობა $x, 10^{-3}$	დისოციაციის ენერგია $D, \text{ ევ}$
$H_2$	$^1\Sigma$	74,1	8,279	28,5	4,48
$N_2$	$^1\Sigma$	109,4	4,445	6,15	7,37
$O_2$	$^3\Sigma$	120,7	2,977	7,65	5,08
$F_2$	$^1\Pi$	128,2	2,147	8,51	1,6
$P_2$	$^1\Sigma$	189,4	1,47	3,59	5,03
$S_2$	$^3\Sigma$	188,9	1,367	3,93	4,4
$Cl_2$	$^1\Sigma$	198,8	1,064	7,09	2,48
$Br_2$	$^1\Sigma$	228,3	0,609	3,31	1,97
$I_2$	$^1\Sigma$	266,6	0,404	2,84	1,54
HF	$^1\Sigma$	91,7	7,796	21,8	5,8
HCl	$^1\Sigma$	127,5	5,632	17,4	4,43
HBr	$^1\Sigma$	141,3	4,991	17,1	3,75
HI	$^1\Sigma$	160,4	4,350	17,2	3,06
CO	$^1\Sigma$	112,8	4,088	6,22	9,7
NO	$^2\Pi$	115	3,590	7,55	5,29
OH	$^2\Pi$	97,1	7,036	22,2	4,35

## ლიტერატურა

1. D.J. Griffiths. "Introduction to Quantum Mechanics" Second Edition. Pearson Education International. New Jersey (USA). 2005.
2. W. Greiner. "Quantum Mechanics" Fourth Edition. Springer. 2001.
3. G.L. Squires. "Problems in quantum mechanics" Cambridge. University Press. 2002.
4. Y. Peleg, R. Pnini, E. Zaarur. "Theory and problems of Quantum Mechanics" Schaum's Outline Series. McGRAW-HILL. New York. 1998.
5. F. Constantinescu, E. Magyari. "Problems in Quantum Mechanics". Pergamon Press. Oxford. 1971.
6. ი. ვაშაკიძე, ვ. მამასახლისოვი, გ. ჭილაშვილი. „კვანტური მექანიკა“. თბილისის უნივერსიტეტის გამომცემლობა, 1978.
7. В.М. Галицкий. "Задачи по квантовой механике". 3-е издание. Едиториал Москва. Часть I. 2001.
8. В.М. Галицкий, Б.М. Карнаков, В.И. Коган. "Задачи по квантовой механике". "Наука". Москва. 1981.
9. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Курс теоретической физики. т III. Квантовая механика. 6 -е издание. ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2004.
10. Л.Д. андау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. ОГИЗ. Москва. 1948.
11. П.И. Елютин, В.Д. Кривченков. "Квантовая механика с задачами" ФИЗМАТЛИТ. Москва. 2000.
12. П.С. Парфенов. "Квантовая механика". ИТМО. Санкт-Петербург. 2012.
13. Т.И. Оришич. Филиппова Л.Г. "Сборник задач с решениями по квантовой физике". Новосибирский Университет. 1991.
14. И.И. Гольдман, В.Д. Кривченков. "Сборник задач по квантовой механике". ГИТТЛ. Москва. 1957.
15. И.Е. Иродов. "Задачи по квантовой механике". "Высшая школа". Москва. 1991.
16. И.Е. Иродов. "Квантовая физика. Основные законы", том 5. ЛитРес. Москва. 2001.
17. Л.Г. Гречко и др. "Сборник задач по теоретической физике". 2-е издание "Высшая школа". Москва. 1984.
18. З. Флюгге. "Задачи по квантовой механике". том 5. "Мир". Москва. 1991.
19. Мин Чен. "Задачи по физике с решениями". "Мир". Москва. 1978.

გამომცემლობის რედაქტორი  
გარეკანის დიზაინი  
კომპ. უზრუნველყოფა

მარინე ვარამაშვილი  
ნინო ებრალიძე  
ლალი კურდღელაშვილი

0179 თბილისი, ი. ჭავჭავაძის გამზირი 14  
14, Ilia Tchavtchavadze Ave., Tbilisi 0179  
Tel: 995(32) 225 14 32  
[www.press.tsu.edu.ge](http://www.press.tsu.edu.ge)

## თეიმურაზ პავლეს ძე ნადარეიშვილი

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების ელემენტარული ნაწილაკების და კვანტური ველების კათედრის ასისტენტ-პროფესორი; ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის მაღალი ენერგიების ფიზიკის ინსტიტუტის ველის კვანტური თეორიის განყოფილების უფროსი მეცნიერ-თანამშრომელი.

თ. ნადარეიშვილი ავტორია 50-მდე სამეცნიერო ნაშრომისა. მისი სამეცნიერო ინტერესების სფეროა: ველის კვანტური თეორია, ელემენტარული ნაწილაკების ფიზიკა, კვანტური მექანიკის პრინციპული საკითხები, თვითმეულებული გაფართოების პრობლემა არარელატივისტურ და რელატივისტურ კვანტურ მექანიკაში.

თ. ნადარეიშვილი 1999 წლიდან კითხულობს ლექციებს, ატარებს პრაქტიკულ მეცადინეობებსა და სემინარებს ზუსტი და საბუნებისმეტყველო ფაკულტეტის ფიზიკის მიმართულების ბაკალავრიატის და მაგისტრატურის სტუდენტებისთვის ზოგადი და თეორიული ფიზიკის საკვანძო საკითხებში.



თეიმურაზ ნადარეიშვილი